NUEVA TEORIA DE LOS FROTAMIENTOS

POR N. PETROFF.

General-Mayor del cuerpo de ingenieros militares de Rusia.

Así como lo dije en la última conferencia dada en nuestro Instituto, la cuestión de la lubrificación de las máquinas á vapor es de la mayor importancia y preocupa constantemente á los sabios como á los prácticos para buscar siempre los mejores procedimientos de engrasamiento.

Gracias, pues, á sus trabajos y experiencias se ha llegado hoy día á encontrar aparatos lubrificadores muy eficaces y las materias más convenientes para lubrificar en cada caso partiular.

Los trababos de Hirn y de Thurston han sido particularmente notables bajo este punto de vista; sin embargo, todos los resultados á los cuales han llegado, no concuerdan en todas sus partes á causa de las desigualdades respectivas de los distintos elementos cuya influencia se ejercía en condiciones diferentes.

Por esto es que Mr. Petroff, en el estudio que ha publicado en la *Revista universal de minas*, aborda directamente esta cuestión apoyándose en las leyes admitidas por Newton para el frotamiento interior de los fluidos. Además, como justificación de la adopción de estas leyes discute todas las teorías que han sido establecidas concerniente al movimiento de los líquidos en las cañerías.

Esta discusión se aplica más particularmente al movimiento telescópico en el cual el líquido que llena el conducto se separa en capas cilíndricas infinitamente delgadas, resfalando las unas sobre las otras con velocidades que disminuyen partiendo del eje hacia la pared interior. En este resfalamiento recíproco, la primera capa se atrasa por su adherencia á la pared—es un frotamiento esterior; la segunda capa se atrasa por la primera, la tercera por la segunda, la cuarta por la tercera y así en seguida —esto es un frotamiento interior.

Pero en virtud del principio de que la reacción es igual á la acción, se ve que la segunda capa atrae á la primera, la tercera atrae á la segunda, etc. . . . y que partiendo del eje de la cañería, una capa cualquiera de radio r y de espesor dr es atraida por la de radio $r—dr$ que la precede y atrasada por aquella de radio $r+dr$ que la sigue, de manera que soporta de la parte de éstas dos capas una fuerza resultante en sentido contrario del movimiento.

Esta resistencia del frotamiento interior, acaecida en el origen por la resistencia del frotamiento exterior, propagándose así de capa en capa, produce sobre todas ellas una disminución gradual de la velocidad, tanto menor cuanto más se acerca al eje del cañón donde corre el filete de mayor velocidad.

En correlación con estas acciones sucesivas, aceleratrices y retardatrices, las leyes de Newton admiten que ellas son proporcionales á las superficies sobre las cuales se ejercen, así mismo como á las velocidades relativas de las capas en contacto; que ellas dependen de las propiedades del fluido y son independientes de la presión. Aquí es preciso decir que Newton no ha tomado en cuenta la influencia de la temperatura, y hay sin embargo ciertos autores que establecen que el frotamiento disminuye cuando la temperatura aumenta.

Designemos, pues por u la velocidad de una capa á la distancia r del eje ox de un conducto horizontal, por v el coeficiente del frotamiento interior, consideremos el anillo elemental interceptado sobre esta capa por dos secciones infinitamente acercadas y perpendiculares al eje ox. Este anillo estará solicitado por las presiones hidráulicas que se ejercen sobre sus dos caras planas laterales ($2\pi\, r\, dr$) y por los frotamientos sobre sus dos faces cilíndricas $2\, \pi\, r\, dx$ y $2\pi\, (r + dr)\, dx$.

Siendo p y $-\left(p + \frac{dp}{dx}\, dx\right)$ las presiones hidráulicas atraídas

á la unidad de superficie, su acción sobre el anillo será:

$$(1)\ p.\ 2\pi\, r\, dr - \left(p + \frac{dp}{dx}\, dx\right) 2\pi\, r\, dr.$$

En cuanto á la fuerza de frotamiento interior, ó á la resistencia al resfalamiento recíproco de las capas fluídas en contacto, como ella disminuye con la distancia al eje, se vé que para la cara cilíndrica interior es inversamente proporcional al espeso- de la capa; además, siendo directamente proporcional á la velor cidad relativa $\frac{du}{dr}$ dr; su expresión será

$$\frac{\left(\frac{du}{dr}\right)dr}{dr} = \frac{du}{dr}$$

y para la face cilíndrica exterior

$$\frac{du}{dr} + \frac{1}{dr} d\left(\frac{du}{dr}\, dr\right)$$

Designando por v el coeficiente de ese frotamiento interior, las fuerzas que operan en las dos faces cilíndricas serán respectivamente

$$2)\quad -v.\ 2\pi\, r\, d\, x. \frac{du}{dr}$$

puesto que $\frac{du}{dr}$ es negativo.

$$\text{y } 3) \qquad v.\, 2\pi\,(r+dr)\,dx \left\{ \frac{du}{dr} + \frac{1}{dr}\, d\left(\frac{du}{dr}\right) dr \right\}$$

Siendo el movimiento del flúido uniforme, se tendrá:

$$p.\, 2\pi\, r\, dr - \left(p. + \frac{dp}{dx}dx\right) 2\pi\, r\, dr - v\, \frac{du}{dr} 2\pi\, r\, dx$$

$$+ v.\, 2\pi (r+dr)\, dx \left\{ \frac{du}{dr} + \frac{1}{dr} d\left(\frac{du}{dr}\, dr\right) \right\} = 0$$

y, agrupando los infinitamente pequenos del segundo orden,

$$-\pi\, r\, dr\, dx\, \frac{dp}{dx} + v \left\{ \frac{du}{dr} + r\, \frac{1}{dr} d\, \frac{du}{dr} \right\} 2\pi\, dr\, dx = 0$$

Suprimiendo el factor común 2π dr dx y notando que

$$\frac{du}{dr} + r.\, \frac{1}{dr} d\left(\frac{du}{dr}\right) = \frac{d.\, \left(r\, \frac{du}{dr} + C\right)}{dr}$$

Se obtiene

$$r\, \frac{dp}{dx} = \frac{v.\, d.\left(r\, \frac{du}{dr} + C\right)}{dr}$$

La presión p varía con x, luego podemos establecer

$$p = A - Bx, \text{ de lo cual } dp = -B\, dx$$

$$\text{y} \qquad Br\, dr = -v.\, d\left(r\, \frac{du}{dr} + C\right)$$

$$\text{integrando, } \int_0^r B\, r\, dr = \frac{B\, r^2}{2} = v\left(r\, \frac{du}{dr}\right)_{r=0} - v\left(r\, \frac{du}{dr}\right)_{r=r}$$

Como $\frac{du}{dr}$ no es infinitamente grande para $r = 0$, se tiene el producto $\left(r \dfrac{du}{dr}\right)_{r=o} = o$, y la fórmula precedente se reduce á

$$\frac{du}{dr} = -\frac{B}{2v} r, \qquad (4)$$

é integrando

$$U = U_o - \frac{B}{4v} r^2 \qquad (5)$$

Para determinar la velocidad U_o correspondiente á $r = o$, supongamos que el anillo elemental se encuentre en contacto inmediato con la pared interior del conducto cuya radio es ϱ; designemos por l el coeficiente de frotamiento exterior, por $U\varrho$ la velocidad en la superficie de contacto $2\pi\varrho\, dx$, la resistencia del frotamiento será:

$$-l\, u\, \varrho.\ 2\pi\varrho\, dx.$$

La presión hidráulica resultante tendrá por espresión— $2\pi\varrho\, dr \dfrac{dp}{dx}$ y el frotamiento sobre la cara cilíndrica se obtendrá reemplazando, en la espresión (2), r por ϱ—dr, lo que nos dará;

$$-v \left(\frac{du}{dr}\right)_{r=\delta} \times \left(\delta - dr\right) 2\pi\ dx.$$

Equilibrándose todas estas fuerzas en el movimiento uniforme del fluído, se tiene

$$-\varrho \frac{dp}{dx} dx\, dr - v \left(\frac{du}{dr}\right)_{r=\varrho} \times \left(\varrho - dr\right) dx - l\ u_{\varrho.}\ \varrho dx = o$$

y argrupando los términos de primer orden,

$$-v \left(\frac{du}{dr}\right)_{r=\varrho} - l\, u_{\varrho} = o$$

$$\text{ó bien } U_\varrho = -\frac{v}{l}\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=\varrho}$$

Según la equación (5)

$$U_\varrho = -U_o - \frac{B}{4v}\varrho^2$$

y como la ecuación (4) da

$$\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=\varrho} = -\frac{B}{2v}\varrho$$

se tendrá

$$U_o = \frac{B}{4v}\left(\varrho + \frac{2v}{l}\right)\varrho$$

$$\text{y} \quad U = \frac{B}{4v}\left\{\varrho^2 + \frac{2v}{l}\varrho - r^2\right\}. \quad (6)$$

Siendo el gasto por una sección anular de radio y de espesor dr

$$d\,Q = 2\,\pi\,u\,r\,d\,r$$

se tiene para la sección entera del conducto, reemplazando *U* por su valor, simplificando e integrando

$$Q = 2\pi \int_0^\varrho u\,r\,dr = \frac{\pi}{8}.\ \frac{B\varrho^4}{v}\left\{1 + \frac{4v}{l\varrho}\right\}. \quad (7)$$

y, designando por *V* la velocidad mediana,

$$Q = \pi\varrho^2 V$$

$$\text{y en fin} \quad V = \tfrac{1}{8}.\ \frac{B\varrho^2}{v}\left(1 + \frac{4v}{l\varrho}\right) \quad (8)$$

Es de notar que las ecuaciones (7) y (8) son idénticas en relación á l y v y no pueden ser tratadas como dos ecuaciones diferentes ó independientes la una de la otra. No se puede pues, por medio de una sola experiencia, deducir los valores de los coeficientes l y v, pero si se toma, para las experiencias, conductos de radios diferentes, cada una de estas ecuaciones puede servir separadamente á la determinación de dichos coeficientes. Es evidente que estas experiencias deben de ser hechas en las mismas condiciones que esas sobre las cuales se basa la ecuación (6).

La comparación que el autor hace de la ecuación (7) con los estudios hechos por varios hombres eminentes, y la discusión de las fórmulas deducidas de las experiencias que han servido á estos estudios, forman una exposición completa de los progresos de la ciencia hidráulica en lo que concierne al movimiento uniforme del agua en los tubos cilíndricos. La conclusión esencial que se deduce para la cuestión del frotamiento de los inductores en las piezas de las máquinas, es que el movimiento telescópico del agua, según las leyes de Newton sobre el frotamiento interior, verificándose para el agua en tubos muy estrechos, se puede suponer se verifiquen también para otros líquidos cuya densidad no es muy grande.

Pero, en la rotación uniforme de un turillón, el inductor que lo separa del coginete, teniendo un espesor muy pequeño, se puede concebir un movimiento análogo al movimiento telescópico, que verificará igualmente las leyes de Newton.

Las velocidades circulares de las capas infinitamente delgadas en las cuales la capa del inductor se separará, varían con la distancia al eje.

La rotación del turillón atraerá la primera capa fluída que lo moja, ésta atraerá la segunda capa, y así para las demás, de suerte que una capa comprendida entre otras dos estará solicitada en el sentido de la rotación por la capa interior y retenida en sentido contrario por la capa exterior.

Para establecer las fórmulas de este movimiento, Mr. Petroff imagina un cilindro vertical de un largo infinito, girando en otro cilindro concéntrico del cual está separado por una capa fluída.

Dos secciones rectas hechas á las distancias z y $z+dz$ de un origen ó tomado sobre el eje común de los cilindros, comprenderán un anillo elemental, en el cual separan el elemento fluído $a\ b\ c\ d$ por dos planos diametrales formando entre sí un ángulo infinitamente pequeño $d\ \alpha$ y por dos superficies cilíndricas de radios $o\ a=r$ y $o\ c=r+dr$, (fig. 1).

Este elemento fiuído está solicitado por la fuerza centrífuga y por fuerzas normales ó paralelas á sus caras.

Sobre las dos caras cilíndricas *ab* y *cd* como sobre las cuatro caras planas *ac*, *bc*, *bd*, *da* operan fuerzas normales proporcionales á sus areas y que se pueden suponer aplicadas en sus centros de gravedad.

Las dos caras cilíndricas *ab* y *cd* están sometidas además, según direcciones normales, al eje, á frotamientos tangenciales debidos á sus velocidades relativas en relación á las capas con las cuales están en contacto.

Las caras planas *ac* y *bd* que siguen el movimiento general de rotación de la capa de la cual el elemento hace parte, no están sometidas á ningún esfuerzo paralelo.

Otra cosa sucede con las caras *ad* y *bc*, puesto que sin la intervencion de las fuerzas que operan en sus planos, el elemento fluído sería solicitado á separarse por una rotación en torno del eje, por las fuerzas de frotamiento de las caras cilíndricas.

La figura (2) representa una sección recta pasando por el centro de gravedad *c* del elemento y en la cual se suponen todas las fuerzas reunidas.

Designando por p la presión normal en el punto a (fig. 1) ó n (fig. 2), atraida á la unidad de superficie, ella será:

$$p+\frac{dp}{dr}dr$$

en el punto *d* ó *m*, la primera operando de O hacia C, y la segunda en sentido contrario de C hacia O.

Siendo δ el peso de la unidad de volumen del fluído y u la velocidad circular, la fuerza centrífuga del elemento estará expresada por

$$\frac{\delta.\, rd\ \alpha.\ dr.\ dz.}{g.} \quad \frac{u.^2}{r}$$

La presión normal por unidad de superficie será la misma sobre las caras *ad* y *ab* ó sobre *m n*, *n n'* que tienen respectivamente el punto común *a* (fig. 1), ó el punto *n* (fig. 2). Por otra parte, como la presión normal sobre el elemento infinitamente pequeño de la superficie cilíndrica de radio r no cambia con la variación del ángulo α, ella será la misma sobre la cara *bc* que sobre las caras *ab* y *ad*, ó la misma sobre *n'n'* que sobre *m n* y *n'm'*.

Por consiguiente, sobre las tres caras *ab*, *ad*, *cd*, ó sobre *n n'*, *n m*, *n'm'* se ejerce la misma presión p.

Para aplicar la hipótesis de Newton á los frotamientos interiores de las caras cilíndricas *n n'* y *m m'*, notemos que designando por s la velosidad angular de la rotación á la distancia r, la derivada en relación á r de la velocidad circular sr será

$$s + r\frac{ds}{dr}$$

y, como en caso de que hubiese frotamiento, es decir, cuando toda la capa fluída diese vuelta como un anillo sólido al rededor del eje, la derivada de la velocidad sería s, se ve que la velocidad relativa de la cual depende el frotamiento, es

$$r\frac{ds}{dr}$$

Fig: 1.

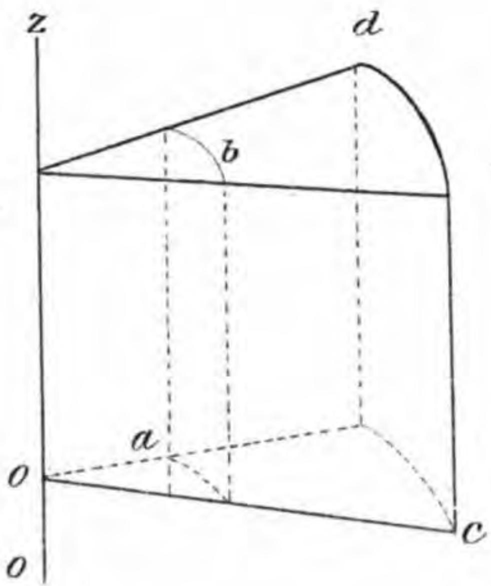
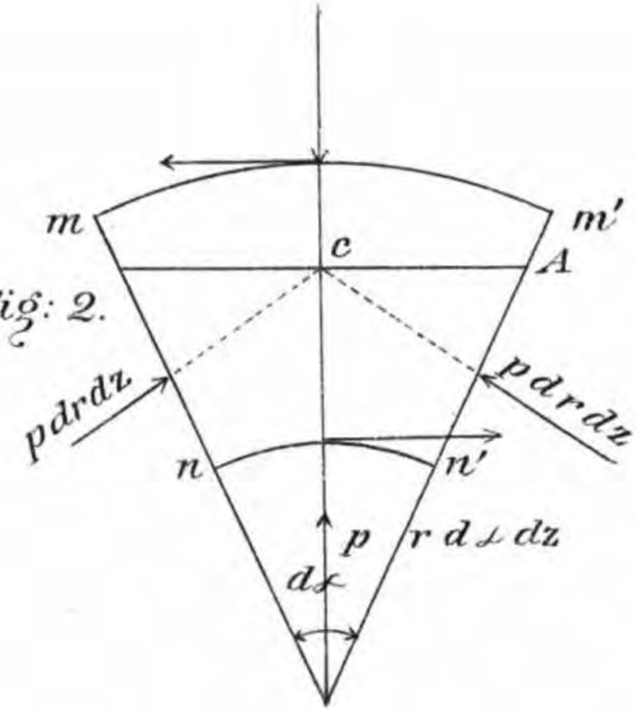


Fig: 2.



Siendo la velocidad circular $u = sr$ á la distancia r del eje, se tiene:

$$\frac{du}{dr} = r\frac{ds}{dr} + s, \quad ó \quad r\frac{ds}{dr} = \frac{du}{dr} - \frac{u}{r}$$

y la velocidad relativa á la distancia $r + dr$, será

$$\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} + \frac{1}{dr} d\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) dr.$$

Designando por v el coeficiente del frotamiento interior, se tendrá sobre la superficie cilíndrica $n\ n'$ el frotamiento.

$$v\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) r\, d\alpha\, dz \quad (A)$$

que tratará de atraerla en el sentido de la rotación de izquierda á derecha, y sobre la cara $m\ m'$ el frotamiento será:

$$v\left\{\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} + \frac{1}{dr} d\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) dr\right\}(r + dr) d\alpha.\ dz$$

$$ó \quad v\left\{\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} + \left(\frac{du}{dr^2} - \frac{r\frac{du}{dr} - u}{r^2}\right) dr\right\}(r + dr)\, d\alpha\ dz,$$

que operará en sentido contrario.

Descuidando en esta última expresión los infinitamente pequeños de un orden superior al tercero, se obtendrá:

$$v\left\{\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right\} r\, d\alpha\ dz + vr\frac{d^2u}{dr^2} dr\, d\alpha\, dz \quad (B).$$

Suponiendo que la rotación del fluido se efectúe en el sentido de las agujas de un reloj y las capas fluidas interiores atrayendo á las capas exteriores, mientras tanto que éstas las retienen, la fuerza que opera en $n\ n'$ será positiva, ó dirigida de izquierda á derecha, y la que opera en *m m'* será negativa ó dirigida de derecha á izquierda.

Pero el signo de la expresión (A) dependerá del signo del binomio $\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}$ Pero $\frac{du}{dr}$ es negativo, visto que la velocidad angular *s* disminuye alejándose del eje.

Las fórmulas (A) y (B) dan, pues, dos cantidades negativas, y si se quiere que ellas designen á la vez en tamaño y dirección las fuerzas que obran en las caras *n n'* y *m m'*, se harán preceder en la presión (A) del signo —, sin cambiar nada la expresión (B).

Las fuerzas tangenciales que actúan en las caras laterales *n m*, *n' m'* se determinan por la consideración de que todas las fuerzas radiales deben ser iguales, puesto que las moléculas se reparten en filetes cilíndricos.

Por consiguiente, si una fuerza *k* solicita al elemento *n m m' n'* segun *n m*, una fuerza igual solicitará segun *n' m'* al elemento inmediatamente vecino á la derecha. Pero á esta fuerza corresponderá para el primer elemento, una reacción *k* operando de *m'* hacia *n'*.

La dimension de esta fuerza *k* se deduce de la ecuación de los momentos en relación al centro de gravedad *c* y se tiene:

1) Los momentos nulos para las fuerzas normales en las distintas caras y para la fuerza centrífuga, que pasan todas por este centro;

2) El momento del frotamiento sobre la cara *n' n*, se obtiene multiplicando por — $\left(\frac{dr}{2}\right)$ la expresión (A)

$$\text{sea} \quad v\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)\frac{r}{2}\ d\alpha\, dz\, dr\,;$$

3) El momento del frotamiento sobre la cara *m m'* se obtiene multiplicando la expresión (B) por $\frac{dr}{2}$, sea

$$v\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)\frac{r}{2}\ d\alpha\, dr\, dz + v\,.\frac{r}{2}.\frac{d\ u}{dr^2}\ dr^2\ d\alpha\ \ dz\ ;$$

4) La suma de los momentos de las fuerzas *k* operando en las caras laterales *n m* y *n′ m′* es

$$k\left(r + \frac{dr}{2}\right)d\,\alpha$$

Debiendo ser nula la suma de todos estos momentos se obtiene

$$k\, r\, d\,\alpha + k\,\frac{dr}{2}\,d\alpha = -v\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) r\, d\,\alpha\, dr\, dz - v\frac{r}{2}\frac{d^2u}{dr^2}dr^2 d\alpha dz$$

y se ve fácilmente que según *nm* se tiene, de *n* hacia *m*, la fuerza

$$k = -v.\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)dr\, dz \qquad (C)$$

y según *n′ m′*, de *m′* hacia *n′*, la fuerza

$$v\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)dr\, dz \qquad (D)$$

En fin, para establecer las relaciones entre las velocidades en los distintos puntos del fluído y las distancias de estos puntos al eje de rotación, se proyectarán todas las fuerzas sobre una tangente llevada por el centro de gravedad C, al circulo descrito del centro O con el radio OC fig. (2).

Para hacer la suma de estas proyecciones, se notará:

1.° Que las proyecciones de la fuerza centrífuga y de las presiones normales sobre las caras *nn′* y *mm′* son nulas;

2.° Que las fuerzas de frotamiento en *nn′* es *mm′* se proyectan en verdadera dimensión;

3.° Que las proyecciones de las fuerzas que operan en las caras *nm*, y *n′m′* se obtienen multiplicando estas fuerzas por sen. $\frac{d\alpha}{2} = \frac{d\alpha}{2}$ y que este seno, positivo para el arco $\frac{d\alpha}{2}$ á la derecha de OC, es negativo para el arco situado á la izquierda.

Debiendo ser nula la suma de todas estas proyecciones, se obtiene la ecuación

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$$

de la cual el integral es

$$U = \frac{C}{r} + C'r \qquad (3)$$

Los constantes C y C' se determinarán según las condiciones particulares de las superficies de contacto del fluído.

Supongamos el elemento fluído en contacto por la cara *mm'* con el cilindro exterior y designemos por

r_2 el radio interior de este cilindro,

U_2 su velocidad de rotación positiva,

u_2 la velocidad de rotación de la capa fluída que le es adherente.

El fluido resfalará sobre la pared interior del cilindro exterior con la velocidad

$$u_2 - U_2,$$

y, designando por l_2 el coeficiente del frotamiento exterior, tendremos para la cara *mm'* el frotamiento

$$l_2 (u_2 - U_2) r_2, d\alpha\, dz.$$

Siendo opuesta la dirección de esta fuerza á la del movimiento del fluído, la expresión de aquí-arriba debe ser tomada negativamente, pero si el cilindro exterior es arrastrado por el fluído, se tiene

$$U_2 < u_2,$$

y, en este caso, el tamaño y la dirección de la fuerza que opera en *mm'* serán expresadas por

$$l\,(U_2 - u_2)\; r_2\, d\alpha\, dz.$$

En cuanto á lo concerniente á las fuerzas que operan en las superficies elementales *n n'*, *n m* y *n' m'*, se tendrán sus valores reemplazando en las fórmulas (A), (C) y (D) *r* por r_2—dr, y suprimiendo los infinitamente pequeños del tercer orden.

La suma de las proyecciones de todas las fuerzas sobre CA dará

$$l_2\,(U_2 - u_2)\; r_2\, d\alpha\, dz - v\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)_{r=r_2} \times r_2\, d\alpha\, dz$$

$$+ v\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)_{r=r_2} \times dr\, d\alpha dz = 0$$

ó bien

$$l_2\,(U_2 - u_2) = v\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)_{r=r_2}$$

La ecuación (3) da

$$\frac{du}{dr} = -\frac{C}{r_2} + C'$$

y

$$-\frac{u}{r} = -\frac{C}{r_2} - C$$

se obtendrá $\quad l_2\,(U_2 - u_2) = -2\, v\,\dfrac{C}{r_2^2} \qquad (4)$

Consideraciones análogas conducen á determinar las condiciones de equilibrio del elemento fluído *n n' m m'* en la hipótesis de que se encuentre en contacto por la cara *nn'* con el cilindro interior;

Sean r_1 el radio del cilindro interior;

U_1 la velocidad en la superficie de este cilindro, en su rotación positiva al rededor del eje.

u_1 la velocidad de rotación del fluído atraído;

l_1 el coeficiente de frotamiento.

Tendremos en el elemento de superficie $n\,n'$ la fuerza de frotamiento dirigida hacia la derecha

$$l_1\,(U_1-u_1)\,r_1\,d\alpha\,dz \qquad \text{(a)}$$

Para determinar las fuerzas que operan en las caras elementales mm', nm y nn', tendremos que reemplazar en las fórmulas (Á), (C) y (D), r por r_1+dr, notando que en este caso la fórmula (A) debe espresar una fuerza negativa de frotamiento ó dirigida hacia la izquierda.

La suma de las proyecciones sobre C A será

$$l_1\,(U_1-u_1)\,r_1\,d\alpha\,dz+v\left(\frac{du}{dr}-\frac{u}{r}\right)_{r=r_1}\times r_1\,d\alpha\,dz$$

$$+v\left(\frac{du}{dr}-\frac{u}{r}\right)_{r=r_1}dr\,d\alpha\,dz=o$$

$$\text{ó bien}\quad l_1\,(U_1-u_1)=-v\left(\frac{du}{dr}-\frac{u}{r}\right)_{r=r_1}$$

y, en virtud de la ecuación (3),

$$l_1\,(U_1-u_1)=2\,v\,\frac{C}{r_1^2}. \qquad (5)$$

De las ecuaciones (4) y (5) combinadas con los valores de u_1 y u_2 deducidos de la ecuación (3),

$$U_1=\frac{C}{r_1}+C'r_2, \qquad U_2=\frac{C}{r_2}+C'r_2$$

se obtiene

$$l_2\left(U_2 - \frac{C}{r_2} - C'r_2\right) = -2v\frac{C}{r_2^2}$$

$$l_1\left(U_1 - \frac{C}{r_1} - C'r_1\right) = 2v\frac{C}{r_1^2}$$

ó bien

$$C\left(\frac{1}{r_2} - \frac{2v}{l_2\, r_2^2}\right) + C'r_2 = U_2$$

$$C\left(\frac{1}{r_1} - \frac{2\, v}{l_1\, r_1^2}\right) + C'r_1 = U_1.$$

Estas ecuaciones en primer grado en C y C′ dan

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{r_1^2 r\, r_2^2\,(U_1\, r_2 - U_2\, r_1)}{r_1\, r_2\,(r_2^2 - r_1^2) + 2\, v\left(\frac{r_2^3}{l_1} + \frac{r_1^3}{l_2}\right)} \\[2ex] C' &= \frac{r_2^2\, U_2\left(r_1 + \frac{2\, v}{l_1}\right) - r_1^2\, U_1\left(r_2 - \frac{2\, v}{l_2}\right)}{r_1\, r_2\,(r_2^2 - r_1^2) + 2\, v\left(\frac{r_2^3}{l_1} + \frac{r_1^3}{l_2}\right)} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

La sustitución de estos valores de C y C′ en la ecuación (3), darán el valor de la velocidad circular u en un punto cualquiera del fluído.

Para verificar la exactitud de la fórmula (5) y, por consiguiente, de la hipótesis sobre la cual está basada, se tomará como término de comparación el momento de la fuerza de frotamiento que se ejerce en la superficie del cilindro interior dando vuelta en el fluído, suponiendo el cilindro interior fijo.

Para un elemento infinitamente pequeño de esta superficie. la fuerza de frotamiento es dada por la fórmula (a) que, en virtud de la ecuación (5), llega á ser

$$2 \text{ v } \frac{C}{r_1} d \, dz$$

y su momento, en relación al eje, será

$$2 \text{ v } \left(\frac{C}{r_1} d\alpha \; dz \right) r_1 = 2 \text{ v } C \, d\alpha \; dz$$

Integrando entre los límites o y 2π para α, z=o y $2 r=h$ para el largo del cilindro, se tiene el momento

$$M = 4 \text{ v } \pi \text{ h } C,$$

y, por la sustitución del valor (6) de C,

$$M = 4 \text{ v } \pi \text{ h } \frac{r_1^2 \, r_2^2 \, (U_1 \, r_2 - U_2 \, r_1)}{r_1 \, r_2 \, (r_2^2 - r_1^2) + 2 \text{ v } \left(\frac{r_2^3}{l_1} + \frac{r_1^3}{l_2} \right)}. \quad (7)$$

Por medio de una serie de experiencias hechas con velocidades diferentes U_1 y con cilindros de diámetros diferentes, la comparación de este momento á la suma de los momentos de las fuerzas exteriores que hacen dar vuelta el cilindro interior permitiera determinar los valores de l_1, l_2 y v y verificar la exactitud la hipótesis establecida. Pero *a priori* se debe preveer que la fórmula (7) no puede convenir mas que para muy pequeñas diferencias de radio,

$$r_2 - r_1 = e;$$

en este caso, descuidando las potencias de e superiores á la primera, se simplificará notablemente la fórmula (7) y si nos contentamos con la aproximación expresada por las dos ecuaciones

$$r_2^2 = r_1 \, (r_1 + 2e), \; r_2^3 = r_1^2 \, (r_1 + 3e),$$

se obtendrá

$$M = v\ 2\pi\ h \frac{r_1^2(r_1 + 3e)\ U_1}{(r_1 + e)\ e + v\left(\frac{r_1 + 3e}{l_1} + \frac{r_1}{l_2}\right)}$$

y si $3e$ es suprimible en relación á r_1,

$$M = v\ r_1 . \frac{2\pi r_1\ h\ U_1}{e + \frac{v}{l_1} + \frac{b}{l_2}}$$

Dividiendo este momento por r_1, se obtiene para la expresión de la resistencia del frotamiento de los dos cilindros,

$$R = v \frac{2\pi\ r_1\ h\ U_1}{e + \frac{v}{l_1} + \frac{v}{l_2}},$$

o

$$R = \frac{2\pi\ r_1\ h\ U_1}{\frac{e}{v} + \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}}$$

Designando la superficie total de contacto del cilindro interior por Q, se tiene

$$Q = 2\pi\ r_1\ h,$$

$$R = u \frac{Q\ U_1}{e + \frac{v}{l_1} + \frac{v}{l_2}} \qquad (8)$$

Esta fórmula establece que para *una temperatura constante del inductor, la resistencia del frotamiento en los dos cilindros engrasados es directamente proporcional: 1.º al coeficiente del frotamiento interior de la materia lubrificante; 2.º á la extensión de la superficie de contacto, y 3.º á la primera potencia de la velocidad relativa á esta superficie; que ella es inversamente* *proporcional á la suma de los tres términos, á saber, el espesor de la capa inductora, y las dos relaciones del coeficiente del frotamiento exterior, primeramente con el cilindro interior, y luego después con el cilindro exterior.*

Mientras mayores son las adherencias de los fluidos á las paredes sólidas comparativamente á su cohesión, más grandes serán l_1 y l_2 en relación á v, y se podrá despreciar $\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}$ en relación a $\frac{e}{v}$, lo que dará

$$R = v \frac{Q U_1}{e},$$

y la resistencia del frotamiento será inversamente proporcional al espesor e de la capa fluida.

Si, al contrario, la cohesión de la sustancia lubrificante es bastante grande para poder descuidar e en relación á $\frac{v}{l_1} + \frac{v}{l_2}$, se obtiene con una exactitud suficiente

$$R = \frac{Q U_1^3}{\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}}$$

En fin, si los dos cilindros son compuestos de la misma materia, de suerte que

$$l_1 = l_2 = l$$

se tiene

$$R = \frac{l}{2} Q U_1 \quad (10)$$

y la resistencia del frotamiento no dependerá, en este caso, ni del espesor de la capa lubrificante ni del frotamiento interior, sino únicamente del frotamiento exterior del fluido sobre las superficies de los dos cilindros, de la velocidad con la cual este frotamiento se produce y de la extensión de las superficies de contacto.

Designando por P la presión total igualmente repartida sobre las superfieies de frotamiento, por $f = \frac{R}{P}$ el coeficiente del frotamiento, y por $p = \frac{P}{Q}$ la presión específica; las fórmulas (8) y (9) darán

$$f = \frac{v\, U_1^2}{p\left(e + \frac{v}{l_1} + \frac{v}{l_2}\right)},$$

$$f = v\, \frac{U_1^2}{e\, p} \quad (11)$$

La fórmula (8) y las que se deducen, basándose sobre hipótesis que no pueden realizarse completamente en la práctica, Mr. Petroff ha tratado de determinar la influencia de los desvíos que se encuentran en los datos teóricos que ha admitido.

En el frotamiento de las piezas de máquinas, las diferencias son:

1) La desigualdad de la adherencia de los cuerpos inductores sobre el largo del cilindro interior;

2) La discontinuidad, según una dirección perpendicular al eje de rotación, de la superficie interior del cilindro exterior, determinada por las rayas de separación de las dos mitades de los cojinetes y por las que sirven al engrasamiento;

3) Las variaciones de temperatura durante el período del movimiento y al mismo instante, en distintos puntos de las superficies de ftotamiento;

4) La incertidumbre concerniente al espesor de la capa inductora, que debe variar con la naturaleza y la temperatura de las superficies lubrificadas; con la presión que ellas soportan y

las deformaciones que pueden resultar; con la disposición de los cuellos y de los cojinetes.

Mr. Petroff llega á las conclusiones siguientes después de una discusión profunda de los estudios de Hirn, Thurston y Kirchweger.

A. PARA PIEZAS DE MÁQUINAS ABUNDANTEMENTE LUBRIFICADAS Y CUYAS SUPERFICIES DE CONTACTO AJUSTAN MUY EXACTAMENTE, *el coeficiente del frotamiento es*;

a) *Directamente proporcional:*

1) al coeficiente v del frotamiento interior para la temperatura actual del inductor;

2) á la velocidad relativa U de las superficies de frotamiento;

b) Inversamente proporcional:

3) al espesor mediano de la capa inductora entre las dos superficies de frotamiento;

4) á la presión p atraída á la unidad de superficie;

c) Para una temperatura dada, t:

5) el espesor de la capa del inductor es inversamente proporcional á $\sqrt{p}$, y

6) en virtud de las ecuaciones (10) y (11), el coeficiente f es inversamente proporcional á $\sqrt{p}$.

7) La temperatura de la capa del inductor depende de las propiedades de la materia que la compone, de la velocidad, de la presión, de la conductibilidad de los cuerpos que la rodean y de la temperatura del medio ambiente.

B.—PARA PIEZAS DE MÁQUINAS CUYO ENGRASAMIENTO ES INSUFICIENTE Y DISCONTINUO, COMO PARA ESAS CUYAS SUPERFICIES NO SE AJUSTAN MUY EXACTAMENTE, el coeficiente del frotamiento es más grande que en las condiciones precedentes y crece con la pobreza del engrasamiento y el defecto de ajustaje. Este último no depende solamente de la desigualdad del pulido y de la fractura de las superficies en contacto, sino también de la alteración de las formas sobre la acción de las fuerzas exteriores.

El autor completa estas conclusiones por observaciones importantes que tienden a demostrar que las resistencias del frotamiento pueden producirse de otra manera que la que se admiten generalmente y que su avaluación, según las leyes actualmente admitidas, puede, en ciertos casos, dar resultados diez veces más elevados.

Así, en lo que concierne á la simple proporcionalidad de la resistencia del frotamiento á la presión, ella no puede verificarse más que sobre ciertas condiciones que son frecuentes. Para que esta proporcionalidad subsista, es preciso que el coeficiente

$$f = \frac{\mathrm{v\,U}}{\mathrm{e\,p}} \quad \text{sea constante.}$$

Pero esto exige que

$$p = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$$

ó la relación de la carga á la superficie de apoyo quede invariable, asimismo como el valor de v ó, lo que es lo mismo, la temperatura t de la capa inductora.

La primera condición, para la cual sería preciso hacer variar la superficie de apoyo con la presión en una máquina sometida á una carga variable, no es realizable, y, en cuanto á la segunda, es preciso que el calor desarrollado sea regularmente absorbido por la pieza de la máquina.

Si se designa por $\triangle$ el coeficiente de conductibilidad, por t_0 la temperatura del aire ambiente y por E el equivalente mecánico del calor, se debe tener la ecuación

$$\frac{\mathrm{v\,U^2P}}{\mathrm{e\,p\,E}} = \triangle\,(\mathrm{t} - \mathrm{t_0})$$

y t no podría quedar constante sino en el caso en que t_0 variase de tal manera que disminuyese á medida que P aumente.

Pero, si se designa por R y R_1 las resistencias del frotamiento bajo las cargas normales P y P_1, las temperaturas correspondientes por t y t_1, los coeficientes del frotamiento interior por v y v_1 y los espesores del inductor por E y E_1, se tiene, para una velocidad constante U y una misma superficie de apoyo Q,

$$p = \frac{P}{Q} \quad y \quad p_1 = \frac{P_1}{Q}$$

$$R = \frac{v\,U}{E\,p} P \quad y \quad R_1 = \frac{v_1\,U}{E_1\,p_1} P_1$$

de lo cual

$$\frac{R}{R_1} = \frac{v}{v_1} \cdot \frac{E_1\,p_1}{E\,p} \cdot \frac{P.}{P_1}$$

y, en virtud de la ecuación (5) que da

$$\frac{E_1}{E} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p_1}}$$

$$\frac{R}{R_1} = \frac{v}{v_1} \cdot \frac{P}{P_1} \sqrt{\frac{p}{p_1}}$$

Esta ecuación nos enseña que la relación $\frac{R}{R_1}$ no puede ser igual á la relación $\frac{P}{P_1}$ cuando las temperaturas t y t_1 son diferentes, sino cuando se tiene:

$$\frac{v}{v_1} \sqrt{\frac{p}{p_1}} = 1.$$

Y cuando la temperatura es constante, es decir, cuando $t=t_1$ y $v=v_1$, se obtiene, reemplazando p y p_1 por $\frac{P}{Q}$ y $\frac{P_1}{Q_1}$

$$\frac{R}{R_1} = \sqrt{\frac{P}{P_1}}$$

es decir que las *resistencias del frotamiento son proporcionales á las raíces cuadradas de las cargas normales.*

Esta relación entre la carga y el frotamiento podrá todavía ser mantenida con una exactitud suficiente, cuando las temperaturas t y t_T sean poco diferentes, como se presenta muy á menudo en las máquinas.

Por otra parte, cuando en el movimiento de una máquina sucede que la carga, la velocidad, la temperatura del aire ambiente y la temperatura en los diversos puntos de las piezas que están frotando sean constantes, el engrasamiento siendo abundante, la relación entre la resistencia de frotamiento R y la carga P puede expresarse todavía por la ecuación general

$$R^3 + (b + 2\,c\,t_\sigma)\,\frac{E\,\Delta}{c\,U}\,R_2 + \frac{E^2\Delta^2}{v_0\,c\,U_2}\cdot\,R = \frac{A\,E^2\Delta^2}{a\,c\,U}\sqrt{Q.P.}$$

Para demostrar esta ecuación.

Sea v el coeficiente de frotamiento interior del inductor; E_0 el espesor de la capa del inductor bajo la presión p_0, las relaciones

$$f = \frac{u\,U}{E\,p},\; E\sqrt{p} = E_0\sqrt{p_0} \;\text{ y }\; p = \frac{P}{Q}$$

dan para la resistencia del frotamiento, cuando las superficies en contacto se ajustan con una exactitud suficiente, poniendo $E_0\sqrt{p_0} = a$.

$$R = \frac{v\,U}{a\sqrt{p}}\cdot\quad P = \frac{v\,U}{a}\cdot\,\sqrt{P}\;\sqrt{Q}$$

y para el trabajo del frotamiento por segundo

$$\frac{v\,U^2}{a}\cdot\sqrt{P}\,.\,\sqrt{Q}$$

Dividiendo esta expresión por el equivalente mecánico **E** del calor y representando por $\triangle$ el coeficiente de conductibilidad y por $t - t_0$ las diferencias de las temperaturas del inductor y del aire ambiente, se obtiene para el número de unidad de calor desarrolladas en la unidad de tiempo:

$$\frac{v\, U^2}{\alpha\, E} \cdot \sqrt{P} \cdot \sqrt{Q} = \triangle\ (t - t_0)$$

El coeficiente v siendo expresado en función de la temperatura por

$$v = \frac{1}{\alpha + b\, t + c\, t^2}$$

Se tendrá:

$$\frac{U^2}{\alpha\, \triangle\, E} \sqrt{P}\, \sqrt{Q} = (a + b\, t + ct^2)\ (t - t_0)$$

y como

$$\frac{R\, U}{E} = \triangle\ (t - t_0) \ \text{ ó } \ t = \frac{F\, U}{\triangle\, E} + t_0$$

$$v_0 = \frac{1}{a + b\, t_0 + c\, t_0^2}$$

La substitución de estos valores dará, desarrollando en relación á R, la ecuación propuesta.

En fin, si en ciertos puntos el engrasamiento hace falta y que el turillón se encuentra en contacto inmediato con el coginete, designemos por f_1 y f_2, por P_1 y P_2 el coeficiente del frotamiento y la carga para las partes no engrasadas y las que están separadas por el inductor.

La resistencia del frotamiento será:

$$R = f_1\, P_1 + f_2\, P_2$$

y designando por P la carga total,

$$R = \left(f_1 \frac{P_1}{P} + f_2 \frac{P_2}{P}\right)P$$

Si los coeficientes f_1 y f_2 son iguales ó difieren muy poco entre ellos, se puede obtener el valor de R sin tener que conocer la repartición de P entre P_1 y P_2. Pero si estos coeficientes son muy diferentes, el valor de R depende evidentemente de P_1 y P_2.

Para $P_1 = 0,1P$; $P_2 = 0,9P$; $f_1 = 0,2$; $f_2 = 0,004$, se obtendria

$$R = 0,0236\ P,$$

mientras tanto que para $P_1 = 0,9$ y $P_2 = 0,1$, el valor de

$$R = 0,1802\ P$$

sería 7,6 veces más grande. Estos ejemplos confirman la opinión de M. Petroff sobre la necesidad de nuevos estudios, con el fin de llenar las lagunas que presentan todavía nuestros conocimientos sobre el frotamiento de las piezas de las máquinas.

Estos estudios deberían hacerse sobre:

1. El tamaño del frotamiento interior de la capa inductora á una temperatura dada;

2. La relación entre este frotamiento interior y la temperatura;

3. La relación entre el espesor de la capa inductora y la velocidad, la carga unitaria sobre las superficies de frotamiento, las propiedades de los metales engrasados y la temperatura;

4. La ley de la trasmisión del calor de la capa inductora á los medios ambientes.

Además, convendría también buscar:

1. La importancia de las condiciones favorables que presente el estado actual de la construcción de las máquinas;

2. La acción que puede ejercer sobre la resistencia del frotamiento un ajuste más ó menos perfecto de las superficies;

3. La de la flexibilidad del turillón y de otras condiciones análogas;

4. Los efectos de un engrasamiento abundante y los de un engrasamiento pobre;

5. La influencia de la disposición de los bordes de los coginetes;

Un examen profundo de todas estas cuestiones colocará la resistencia de los frotamientos al nivel de las fuerzas que se puede disponer á voluntad. Penetrándonos más profundamente de los fenómenos de estos frotamientos mediatos, nos permitirá alejar los errores á los cuales estamos todavía expuestos y decidir con mayor exactitud todo lo que concierne á las dimensiones y á la manera de escojer el metal y la materia lubrificadora en los órganos que permiten dar á las piezas de las máquinas un movimiento de rotación al rededor de sus ejes geométricos.

E. LABATUT.