Las piezas cargadas por punta

POR

BRUNO ELSNER.

Durante el trascurso de los últimos años se ha producido en Europa i Norte América la caida de una serie de construcciones de fierro, accidentes que en último término casi siempre han sido debidos a la ruptura de una pieza cargada por punta. Citaremos los hundimientos del puente sobre el Quebec i del gasómetro de Hamburgo.

Esta última catástrofe dió orijen a un proceso en el cual figuraban entre otros con el carácter de peritos, Müller-Breslau i Krohn. En sus informes técnicos estos últimos estudiaron detenidamente el problema de las piezas cargadas por punta, espusieron una serie de ideas nuevas i fundaron sus deducciones en los resultados de las esperiencias cada vez mas perfectas efectuadas durante los últimos años en los laboratorios de resistencia de materiales.

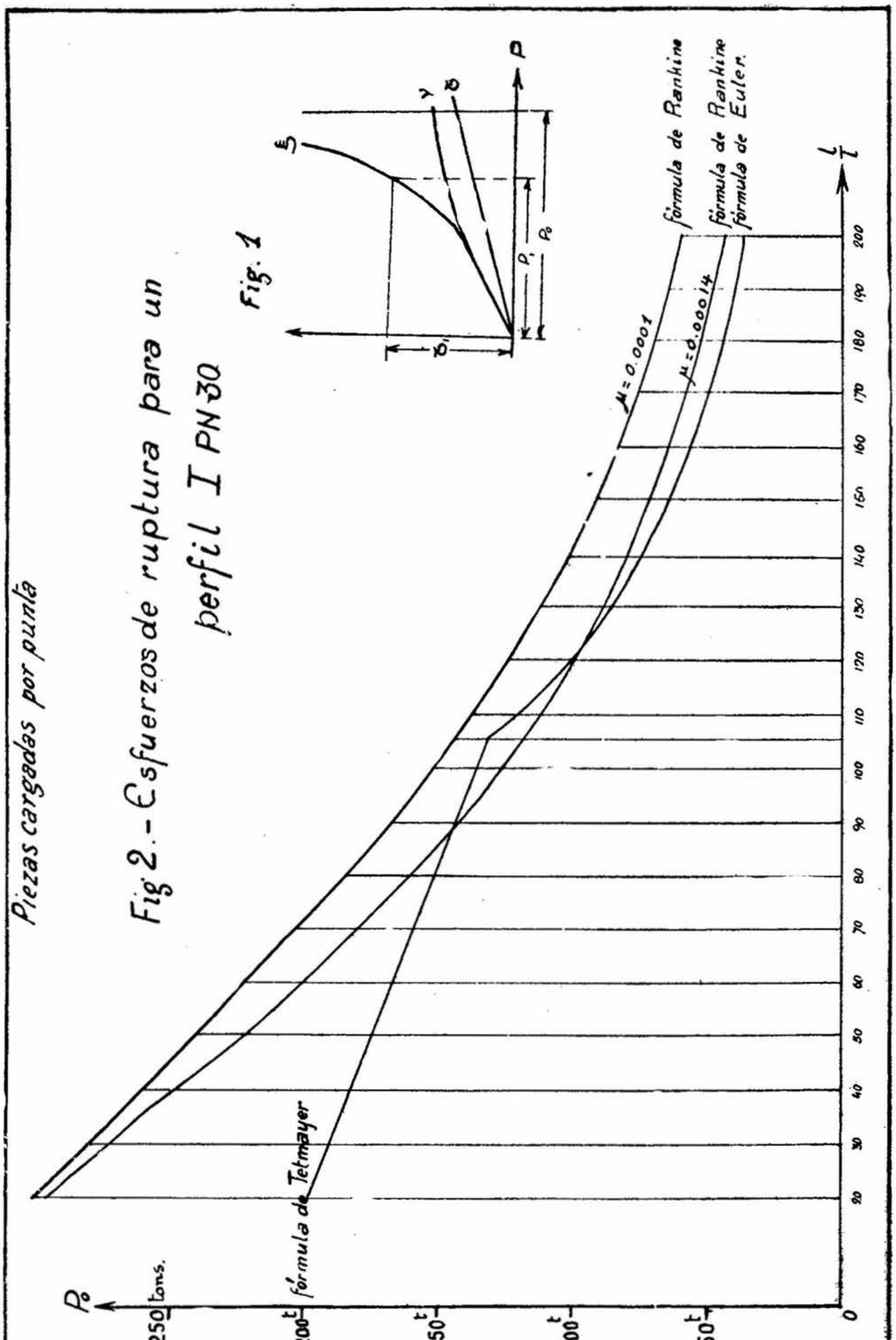
Estos diversos estudios, junto con otros trabajos de investigacion sobre la misma materia de Mohr i Engesser i otros autores, estan publicados en los últimos números de las revistas técnicas alemanas.

Creemos de interes esponer en los párrafos que siguen lo mas importante i útil que en esos trabajos hemos encontrado.

En la práctica nunca se realizará el caso de que una pieza esté solicitada esclusivamente por compresion simple. Siempre existiran junto al esfuerzo axial, momentos de flexion i esfuerzos de corte secundarios, que desarrollarán tensiones secundarias al lado de las tensiones principales debidas al esfuerzo axial.

En la figura 1 se han representado las tensiones que se desarrollan en una barra comprimida. Las ordenadas indican las tensiones i las abscisas los esfuerzos solicitantes. La línea τ representa las tensiones principales producidas por el esfuerzo axial. Se tiene que

$$\tau = \frac{N}{\omega}$$


Piezas cargadas por punta
Fig 2.- Esfuerzos de ruptura para un perfil I PN 30
Fig. 1
fórmula de Rankine
$\mu = 0.0001$
fórmula de Rankine
$\mu = 0.00014$
fórmula de Euler.
fórmula de Tetmayer
P_0
250 tons.
200 t
150 t
100 t
50 t
0
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200
$\frac{l}{i}$

La linea v representa las tensiones secundarias corrientes debidas en su mayor parte a momentos secundarios que obran en las estremidades de la barra. Estas tensiones son funciones aljebraicas de las cargas i su influencia disminuye a medida que las cargas aumentan.

La línea ξ representa las tensiones que se desarrollan cuando el eje de la pieza no es perfectamente recto o bien cuando el esfuerzo no está centrado. Como ninguna de estas condiciones puede satisfacerse en la práctica, las tensiones ξ nunca se podran eliminar. Los tensiones ξ son funciones esponenciales de las cargas solicitantes. En un principio su valor es insignificante, pero a medida que las segundas aumentan crecen con rapidez.

La ruptura de la pieza puede deberse a que las tensiones τ alcanzan el límite de ruptura o bien la barra está solicitada por punta i se rompe porque el esfuerzo solicitante llega al límite de ruptura, e. d. las tensiones ξ llegan al máximun.

El esfuerzo que produce la ruptura de la pieza cuando esta resiste como pieza cargada por punta lo llamaremos esfuerzo de ruptura por flambaje i lo designaremos por P_0.

Una barra cargada por punta se romperá jeneralmente ántes de que el esfuerzo solicitante adquiera el valor P_0, debido a las influencias secundarias v. Este esfuerzo de ruptura efectivo, que designaremos por P_1, es mui difícil de fijar. Se acepta como cierta fraccion de P_0, o sea

$$P_1 = \frac{P_0}{n_0}$$

El esfuerzo solicitante que en la práctica puede aceptarse debe quedar todavia bastante inferior a P_1 puesto que en la determinacion de este esfuerzo por medio del cálculo se ha despreciado una serie de influencias que en el caso mas desfavorable pueden producir un esfuerzo solicitante doble i aun triple del esfuerzo calculado. Así por ejemplo, las cargas que solicitan la construccion pueden llegar con el tiempo a ser mayores que las que sirvieron de base en el cálculo; la construccion puede estar solicitada temporalmente por sobrecargas estraordinarias; se pueden ejercer acciones dinámicas cuya influencia es difícil de precisar; la seccion efectiva de la pieza puede resultar menor que la exijida por el cálculo, ya sea esto debido a un error de construccion o bien a la accion del moho; el esfuerzo solicitante puede obrar excéntricó, lo que fácilmente sucede si hai remaches mal colocados; puede existir una pequeña curvatura en el eje de la pieza, la que ha pasado desapercibida durante la armadura; en el cálculo no se toma en cuenta la accion del peso propio, el que en piezas cuyo eje no es vertical produce momentos de flexion; la resistencia del material o el esfuerzo de ruptura por flambaje pueden ser menores que los valores normales admitidos en el cálculo; etc.

El esfuerzo solicitante máximo admisible, que designaremos por la letra P_k, se toma por las razones espuestas igual a una fraccion del valor definido mas arriba, o sea

$$P_k = \frac{P_1}{n_1} = \frac{P_o}{n_1\, n_o} = \frac{P_o}{n}$$

El divisor n se llama coeficiente de seguridad. Su valor numérico no se puede deducir por el cálculo. Solo se puede fijar en vista de apreciaciones mas o ménos acertadas, debiendo tomarse en consideracion las circunstancias especiales de cada caso.

En barras largas ciertas influencias secundarias son mas desfavorables que en barras cortas. En vista de esto, algunas administraciones hacen variar el valor de n con el largo de la pieza.

Asi por ejemplo en el pliego de condiciones de la administracion de ferrocarriles de Baden se hace $n=3+0.1\ \lambda$, siendo λ la lonjitud en m. de la pieza.

De lo espuesto mas arriba se puede deducir que la introduccion del coeficiente n no significa que el esfuerzo solicitante P puede aumentar n veces ántes que se produzca la ruptura de la pieza. La seguridad real que la barra posee cuando está solicitada del modo mas desfavorable puede ser mucho menor que n.

El coeficiente n es simplemente un valor aritmético que se determina de manera que en el momento en que la barra está solicitada del modo mas desfavorable no se produzcan tensiones peligrosas. La seguridad real en esta circunstancia puede bajar en ciertos casos hasta 1,5 a 1,3.

Conocido el esfuerzo solicitante P i la tension peligrosa τ_1 se puede determinar la seccion ω de la barra por la relacion:

$$\omega = \frac{nP}{\tau_1}$$

Para la determinacion del esfuerzo de ruptura por flambaje P_o existen una série de fórmulas justificadas por esperiencias mas o ménos completas. La que mayor aplicacion ha encontrado es la fórmula de Euler:

$$P_o = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

la tension unitaria correspondiente es:

$$\tau_o = \frac{P_o}{\omega} = \pi^2 \frac{E\,I}{l^2\,\omega} = \pi^2\, E\left(\frac{i}{l}\right)^2 ;\ i^2 = \frac{I}{\omega}$$

Para deducir esta fórmula se hace la hipótesis de que la proporcionalidad entre las tensiones i las deformaciones subsiste hasta el momento de la ruptura. Por consiguiente esta fórmula dará resultados exactos únicamente cuando se aplica a piezas comprimidas cuyo flambaje se produce ántes de que la tension unitaria alcance el límite de proporcionalidad, o sea cuando

$$\tau_o = \pi^2\, E\left(\frac{i}{l}\right)^2 < \tau_p$$

Para el acero dulce se tiene: $E=2150\ ^t/cm^2$; $\tau_p=1{,}9\ ^t/cm^2$, luego

$$\left(\frac{l}{i}\right) > \sqrt{\frac{\pi^2 \times 2150}{1{,}9}} > 105$$

En el curso del año 1908 se han efectuado en el Instituto para Mecánica Aplicada de la Universidad de Gontti gen numerosas esperiencias con piezas cargadas por punta. En estas esperiencias se realizaron (con una perfeccion hasta entonces nunca alcanzada) las condiciones de un apoyo articulado i la centralizacion del esfuerzo solicitante. El material usado era el acero Martin; su resistencia a la ruptura es de $6{,}8\ ^t/cm^2$, su módulo de elasticidad $E=2170\ ^t/cm^2$ i su límite de proporcionalidad $\tau_p=2{,}6\ ^t/cm^2$.

Introduciendo estos valores en la fórmula de Euler resulta que ella puede aplicarse para $\frac{l}{i}>91$.

En el cuadro siguiente estan indicadas las tensiones de ruptura observadas i las tensiones calculadas, ámbas en kgr./cm^2 , i la diferencia entre ambos valores en porcientos.

$\frac{l}{i}$	τ_0 observado	τ_0 calculado	Diferencia en %
175,8	690	693	—0,4
146.0	1000	1005	—0,5
116,2	1595	1586	+0,6
103	2030	2019	+0,5
95,3	2305	2358	—2,3
91,3	2500	2569	—2,8

Estos resultados prueban claramente que la fórmula de Euler da valores prácticamente exactos para el esfuerzo de ruptura, siempre que ella se aplique para un $\frac{l}{i}>105$ tratándose de acero dulce.

Para un $\frac{l}{i}<105$ no será posible deducir una fórmula teórica análoga a la de Euler hasta que no se conozca la lei de variacion de E mas allá del límite de proporcionalidad. Basándose en las esperiencias citadas mas arriba se ha deducido una fórmula para un $\frac{l}{i}<105$ análoga a la de Euler, en la que se reemplaza E por un valor variable E'.

Tetmayer, quien hizo un gran número de esperiencias, ha espresado el valor de P_0 en el dominio cerrado a la fórmula de Euler, por medio de una funcion lineal de $\frac{l}{i}$ de la forma:

$$P_0 = \omega\left(\alpha + \beta\frac{l}{i}\right)$$

funcion que para el acero dulce se reduce a

$$P_0 = \omega\left(3{,}1 - 0{,}0114\frac{l}{i}\right) \text{ ton}$$

A continuacion indicamos los resultados esperimentales obtenidos i los valores que da la fórmula de Tetmayer para barras de acero Martin con un $\frac{l}{i} < 96$.

$\frac{l}{i}$	τ_0 observado en k cm²	τ_0 calculado en k cm²	Diferencia
88	2720	2805	—3,1
82	2740	2842	—3,7
73,1	2950	2897	+1,8
58,6	3130	2987	+4,6
53,6	3165	3018	+4,7
48,2	3020	3052	—1,1
43,3	3060	3058	0
38,2	3250	3113	+4,2
28,8	3445	3176	+5,1

Se observa que los valores determinados por Tetmayer son en jeneral menores que los valores encontrados en las esperiencias de Goettingen.

Esto se deberá probablemente a que Tetmayer no logró centrar el esfuerzo solicitante con gran exactitud, lo que dió orijen a momentos secundarios que apresuraron la ruptura de la pieza.

Pero esta pequeña falta de precision de la fórmula de Tetmayer redunda en su provecho, pues al no lograr Tetmayer la centralizacion del esfuerzo se acercó al caso de la práctica, en el que jamas se encuentra realizada la solicitud axial perfecta.

Existe otra fórmula usada en muchos paises, no tanto por la exactitud de sus resultados como por la facilidad de su manejo.

Es la fórmula de Rankine conocida bajo la forma

$$\tau_\omega = \tau\left(1 + \mu\left(\frac{l}{i}\right)^2\right)$$

τ_o es la tension máxima que se desarrolla en la pieza, τ la tension debida al esfuerzo axial i μ un coeficiente variable con el material de la pieza.

El esfuerzo de ruptura para el acero dulce se obtiene multiplicando ámbos miembros por ω i dando a τ el valor 4,4 $^t/cm^2$ i a μ el valor 0,0001 encontrado por Rankine.

Se tiene que

$$P_o = 4{,}4\omega\left(1+\mu\left(\frac{l}{i}\right)^2\right)$$

En la fig. 2 hemos dibujado los valores de P_o que en funcion de $\frac{l}{i}$ dan las diversas fórmulas estudiadas mas arriba.

Se ve que la fórmula de Rankine da para $\mu=0{,}0001$ valores hasta en un 60 % mayores que la fórmula de Euler.

Para obtener con esta fórmula resultados mas acordes con los valores esperimentales, Tetmayer reemplaza el valor 0,0001 por 0,00014. La curva que con este valor resulta, tambien se ha dibujado en la fig. 2. Como se ve, no es posible hacer coincidir esta curva con la que corresponde a las fórmulas de Euler i Tetmayer.

Un factor que tiene gran influencia en la magnitud del esfuerzo de ruptura es la escentricidad del refuerzo solicitante. En la mayoría de los casos será imposible determinar esta escentricidad; pero esto no justifica el tomarla igual a cero.

La barra no solo debe poder resistir satisfactoriamente el esfuerzo axial sino tambien el momento proveniente de la escentricidad del esfuezo solicitante, momento que siempre se producirá con mayor o menor intensidad.

Para tomar en cuenta este momento propone Müller-Breslau que barras comprimidas se calculen con esfuerzo doble al que da el cálculo i con una escentricidad igual a $\frac{l}{200}$ La tension que en tal circunstancia se produce no debe sobrepasar el límite de elasticidad.

Para poder efectuar rápidamente los cálculos correspondientes desarrolla Müller-Breslau las fórmulas siguientes:

Sea a la escentricidad del esfuerzo. En la ecuacion de la elástica de una barra comprimida,

$$(1)\ldots\ldots -EI\frac{d^2y}{dx^2}=P(a+y)$$

se reemplaza y en funcion de la abscisa de una sinusoide

$$y=\delta\ \text{sen}\ \frac{\pi x}{l}$$

i se integra dos veces haciendo $\frac{dy}{dx}=o$ para $x=\frac{l}{2}$, e $y=o$ para $x=o$. Resulta:

$$EI\,y = \frac{P\,a\,x\,(l-x)}{2} + \frac{P\,\delta\,l^2}{\pi^2}\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{l}$$

i para $x = \frac{l}{2}$, $y = \delta$:

$$EI\delta = \frac{P\,a\,l^2}{8} + P\,\delta\,\frac{l^2}{\pi^2}$$

Haciendo: $V = \frac{P_E}{P}$, en que: $P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$, se obtiene la relacion:

$$(2)\ldots\ldots\quad \delta = \frac{\pi^2}{8}\,a \times \frac{1}{V-1} = \frac{5}{4}\,a\,\frac{1}{V-1}$$

Dentro del límite $\tau \leqq \tau_p$, V es el coeficiente de seguridad contra el flambaje. Fuera de este límite P_E pasa a ser un valor simplemente aritmético.

Si hacemos $P = P_E$, la ecuacion (2) da para un valor de a tan pequeño como se quiera, el valor ∞ para δ. De manera que la ecuacion (2) deja de ser aplicable cuando V se acerca a 1.

Sea W el módulo de flexion del perfil; entónces:

$$\tau = \frac{P}{\omega} + \frac{P\,(\delta + a)}{W}$$

La condicion $\tau = \tau_p$ introducida en (2) da:

$$(3)\ldots\ldots\quad W = \frac{P}{\tau_p}\,(k + a\,V'); \quad k = \frac{W}{\omega} \quad \text{(radio del núcleo)}$$

$$V' = \frac{V + 0{,}25}{V-1}$$

Para aplicar esta fórmula se acepta por estimacion valores para K i V', se calcula W i se corrije en seguida este valor; o bien se calcula primero la barra como pieza cargada por punta i se verifica en seguida si la condicion (3) queda satisfecha. En caso que así no fuera, se refuerza el perfil. Damos a continuacion una tabla con valores correspondiente de V i V':

V	V'	V	V'
2,0	2,25	6	1,25
2,5	1,83	7	1,21
3,0	1,625	8	1,18
3,5	1,50	9	1,16
4,0	1,42	10	1,14
5,0	1,31	20	1,07

Ejemplo:

Hai que determinar una barra de seccion doble T de 250 cm. de largo, que debe resistir una carga de 50 t.

Estimamos: $k=1,2$ i, para la carga doble, es decir, $P=100$ t., $V=3,5$, $V'=1,5$.

Obtendremos para: $a=\frac{l}{200}=1,25$ cm.

$$W=\frac{100\,(1,2+1,25\times 1,5)}{2,2}=140 \text{ cm.}^3$$

Elejimos el perfil doble T P. N. 38, cuyo $W=131$, $\omega=107$, $k=\frac{W}{\omega}=1,22$, $I=972$

i encontramos:

$$P_E=\frac{\pi^2 E\,I}{l^2}=\frac{21220\times 972}{6250}=330 \text{ t.}$$

$$V=\frac{P_E}{P}=3,30; \quad V'=1,54$$

Este perfil es por consiguiente, aceptable.

Tiene un $i=\sqrt{\frac{I}{\omega}}=3,01$; $\frac{l}{i}=83$.

Segun la fórmula de Tetmayer:

$$P_0=(31,-0.0114\times 83)\times 107=230 \text{ t.}$$

Su coeficiente de seguridad es:

$$n=\frac{230}{50}=4,3.$$

(Continuará).