

Cálculo de Construcciones Asísmicas

(Continuación)

PARTE SEGUNDA

VIBRACION DE LAS CONSTRUCCIONES

Se dice que un cuerpo vibra cuando sus puntos se mueven alrededor de la situación de equilibrio de manera que sus posiciones tienden a repetirse transcurrida una cierta cantidad de tiempo. Este intervalo de tiempo es lo que se llama el *período* de la vibración y la distancia máxima que en cada oscilación alcanza un punto dado respecto de su posición de equilibrio es la *amplitud* del movimiento.

Cuando después de sacar un cuerpo de la posición de equilibrio se suelta y se deja vibrar de modo que no actúen fuerzas exteriores sobre él, decimos que el cuerpo *vibra libremente*.

Si hay fuerzas resistentes que se oponen al movimiento, debidas a roce con el medio exterior o a fricciones internas en el material del objeto que vibra, se producen *vibraciones amortiguadas*. Al contrario si actúa sobre el cuerpo una fuerza exterior perturbadora cuya intensidad es función periódica del tiempo, se presenta el caso de las *vibraciones forzadas*. Suponiendo que el período de la fuerza perturbadora vaya aproximándose al período de vibración libre propio del cuerpo considerado, la amplitud de los distintos puntos van creciendo más y más, hasta llegar a hacerse infinitas cuando ambos períodos coinciden, como lo demostraremos más adelante al tratar de las varillas. Esto es lo que se llama fenómeno de *resonancia* y su efecto es naturalmente la destrucción del objeto que vibra.

En el capítulo que se desarrolla a continuación estudiaremos los problemas de vibración en las construcciones y especialmente cuando actúa sobre ellas una fuerza perturbadora como es la originada por el movimiento de la base que tiene lugar durante un temblor. Primero trataremos de las torres, chimeneas, muros aislados, etc. y después de los edificios.

El caso de los muros aislados, chimeneas y torres es asimilable al de una varilla fija en su base y cuyo extremo superior puede moverse libremente. Si el terreno de fundación es indeformable se asemejará a una varilla empotrada en su base. En caso contrario se tratará de una varilla con empotramiento elástico.

1) PRISMA EMPOTRADO EN SU BASE

Sea $o o'$ la situación de reposo y $o_t o'_t$ la posición de la varilla en un instante dado t . Lo que se ha desplazado la base llamémoslo y mientras lo que se desplaza un punto a la cota z denomiémoslo u . Sean además para varilla:

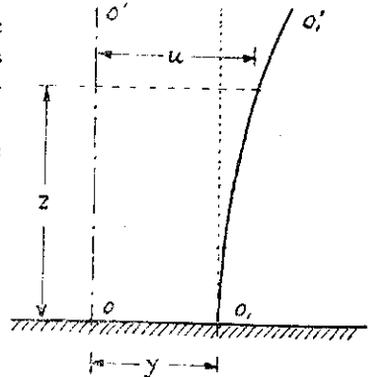
E coeficiente de elasticidad (módulo de Young).

I momento de inercia de una sección.

S área de una sección.

ρ densidad del material.

h la altura.



La ecuación de la elástica es

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2(u-y)}{dz^2}$$

pero como y es independiente de z

$$\frac{d^2(u-y)}{dz^2} = \frac{d^2u}{dz^2}$$

o sea

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2u}{dz^2}$$

Considerando EI constante al derivar tenemos

$$\frac{1}{EI} \frac{dM}{dz} = \frac{d^3u}{dz^3}$$

$$\frac{1}{EI} \frac{d^2M}{dz^2} = \frac{d^4u}{dz^4}$$

Pero $\frac{dM}{dz} = -Q$ (esfuerzo de corte)

y $\frac{dQ}{dz} = -p$ (carga por unidad de longitud) luego

$$\frac{1}{EI} \frac{d^2M}{dz^2} = \frac{1}{EI} p = \frac{du^4}{dz^4}$$

Las únicas fuerzas que actúan son las desarrolladas por la inercia, de manera que según el principio de D'Alembert

$$p = -s \cdot \rho \cdot \frac{d^2 u}{dt^2}$$

Siendo u función t y de z las derivadas son derivadas parciales, de manera que llegamos a la ecuación diferencial

$$-\frac{s \cdot \rho}{EI} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^4 u}{\partial z^4}$$

que es la ecuación de las varillas vibrantes conocidas en Física. (1)

En la Teoría de las Vibraciones se demuestra que un cuerpo elástico puede vibrar de una infinidad de maneras diferentes. Nuestro estudio se limitará a estudiar los modos normales de vibrar, que son aquellos en que los distintos puntos del cuerpo ejecutan un movimiento armónico, del mismo período y pasan simultáneamente por la posición de equilibrio. Esto corresponde al caso que nos interesa, pues supondremos que en el instante inicial el prisma se encontraba en reposo. La integral de la ecuación diferencial que tenemos es, en este caso, un producto de dos funciones, una de las cuales depende sólo del tiempo y la otra de la coordenada z solamente. De esta manera tenemos

$$u = \varphi(t) \cdot f(z)$$

Pero $\varphi(t)$ es como dijimos una función armónica del tiempo y podemos por lo tanto representarlo por

$$\varphi(t) = A \operatorname{sen} kt + B \operatorname{cos} kt$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial

$$-\frac{s \rho}{EI} [-k^2 (A \operatorname{sen} kt + B \operatorname{cos} kt)] \cdot f(z) = (A \operatorname{sen} kt + B \operatorname{cos} kt) \frac{\partial^4 f(z)}{\partial z^4}$$

$$k^2 \frac{s \rho}{EI} f(z) = \frac{\partial^4 f(z)}{\partial z^4}$$

Llamando λ al coeficiente $\sqrt[4]{\frac{k^2 s \rho}{EI}}$ queda

$$\lambda^4 f(z) = \frac{\partial^4 f(z)}{\partial z^4}$$

(1) Ver Timoshenko.—«Vibration problems in Engineering». Van Nostrand, New York. 928, pág. 199 y sigs.)

ecuación que se satisface con las funciones $\text{sen } \lambda z$, $\text{cos } z$, $\text{sen } h \lambda z$, $\text{cos } h \lambda z$, de manera que la integral general es la suma de todas ellas, multiplicadas por constantes arbitrarias

$$f(z) = C_1 \text{sen } \lambda z + C_2 \text{cos } \lambda z + C_3 \text{sen } h \lambda z + C_4 \text{cos } h \lambda z$$

cuyos valores se determinan en cada caso particular por las condiciones de los extremos del prisma. La función $f(z)$ determina así la forma de la vibración, mientras la función $\varphi(t)$ define la amplitud y el período de movimiento, que dependen de las constantes A , B y k . En el caso que consideramos el valor de estas constantes queda determinado por tratarse de vibraciones forzadas.

La ecuación que tenemos que estudiar es por consiguiente

$$u = (A \text{sen } kt + B \text{cos } kt) (C_1 \text{sen } \lambda z + C_2 \text{cos } \lambda z + C_3 \text{sen } h \lambda z + C_4 \text{cos } h \lambda z)$$

que es la integral de la ecuación

$$-\frac{\lambda^4}{k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^4 u}{\partial z^4}$$

como puede comprobarse fácilmente, derivándola dos veces respecto a t y cuatro veces respecto a z .

Vimos en la primera parte de este estudio que el movimiento del suelo durante un temblor podía representarse por una función armónica del tiempo debido a que los materiales que componen la corteza terrestre se rigen aproximadamente por la ley de Hooke. Esta conclusión había sido ampliamente confirmada por el examen de los sismógramas que permitía conocer la amplitud y el período de la oscilación sísmica. La ecuación que representa el movimiento de un punto del suelo es por lo tanto

$$\lambda = a \text{sen } \omega t$$

en que ω vale $\frac{2\pi}{T}$ siendo T el período del temblor y a su amplitud.

Las condiciones que debemos imponer, por lo tanto, al movimiento del prisma, son las siguientes:

- a) La base debe seguir el movimiento del suelo, o sea

Para $z=0$ $u=y=a \text{sen } \omega t$

- b) El prisma debe estar empotrado:

Para $z=0$ $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

c) Momento nulo en el extremo libre:

$$\text{Para } z=h \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

d) Esfuerzo de corte nulo en el extremo libre:

$$\text{Para } z=h \quad \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 0$$

Estas condiciones equivalen a las siguientes ecuaciones:

- 1) $(A \operatorname{sen} kt + B \operatorname{cos} kt) (C_2 + C_4) = a \operatorname{sen} \omega t$
- 2) $(A \operatorname{sen} kt + B \operatorname{cos} kt) \cdot \lambda \cdot (C_2 + C_4) = 0$
- 3) $(A \operatorname{sen} kt + B \operatorname{cos} kt) \cdot \lambda^2 \cdot (-C_1 \operatorname{sen} \lambda h - C_2 \operatorname{cos} \lambda h + C_3 \operatorname{sen} h \lambda h + C_4 \operatorname{cos} h \lambda h) = 0$
- 4) $(A \operatorname{sen} kt + B \operatorname{cos} kt) \lambda^3 \cdot (-C_1 \operatorname{cos} \lambda h + C_2 \operatorname{sen} \lambda h + C_3 \operatorname{cosh} \lambda h + C_4 \operatorname{sen} h \lambda h) = 0$

De la ecuación 1) se obtiene

$$k = \omega$$

o sea el período de la vibración forzada del cuerpo es el mismo del temblor.

Además

$$B = 0$$

$$1') \quad A (C_2 + C_4) = a$$

La ecuación 2) da

$$2') \quad C_2 + C_4 = 0 \quad \text{o sea} \quad -C_4 = C_2$$

Las ecuaciones 3) y 4)

$$3') \quad -C_1 \operatorname{sen} \lambda h - C_2 \operatorname{cos} \lambda h + C_3 \operatorname{sen} h \cdot \lambda h + C_4 \operatorname{cosh} \lambda h = 0$$

$$4') \quad -C_1 \operatorname{cos} \lambda h + C_2 \operatorname{sen} \lambda h + C_3 \operatorname{cosh} \lambda h + C_4 \operatorname{sen} h \cdot \lambda h = 0$$

De las ecuaciones 3') y 4') se desprende

$$C_1 = C_4 \frac{\operatorname{cos} h \lambda h \cdot \operatorname{sen} \lambda h + \operatorname{sen} h \lambda h \operatorname{cos} \lambda h}{1 + \operatorname{sen} \lambda h \operatorname{sen} h \lambda h + \operatorname{cos} \lambda h \operatorname{cos} h \lambda h}$$

$$C_1 = C_2 \frac{\operatorname{cos} \lambda h \operatorname{sen} h \lambda h + \operatorname{sen} \lambda h \operatorname{cos} h \lambda h}{1 - \operatorname{sen} \lambda h \operatorname{sen} h \lambda h + \operatorname{cos} \lambda h \operatorname{cos} h \lambda h}$$

Si para abreviar llamamos

$$\begin{aligned} \cos h \cdot \lambda h \operatorname{sen} \lambda h + \operatorname{sen} h \lambda h \cos \lambda h &= \kappa \\ 1 - \operatorname{sen} \lambda h \operatorname{sen} h \lambda h + \cos \lambda h \cos h \lambda h &= \mu \\ 1 + \operatorname{sen} \lambda h \operatorname{sen} h \lambda h + \cos \lambda h \cos h \lambda h &= \nu \end{aligned}$$

tenemos

$$\left. \begin{aligned} \text{I) } C_1 &= C_4 \frac{\kappa}{\nu} \\ C_2 &= C_3 \frac{\kappa}{\mu} \\ C_1 &= -C_3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{II) } C_2 &= C_4 \frac{\mu}{\nu} \\ \text{III) } C_3 &= -C_4 \frac{\kappa}{\nu} \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores de las constantes en la ecuación primitiva tendremos por fin

$$5) \quad u = \frac{\alpha \operatorname{sen} \omega t}{\mu + \nu} \left[\kappa (\operatorname{sen} \lambda z - \operatorname{sen} h \lambda z) + \mu \cos \lambda z + \nu \cos h \lambda z \right]$$

Hay resonancia, es decir u se hace infinito, cuando

$$6) \quad \begin{aligned} \mu + \nu &= 0 && \text{o sea} \\ 2 + 2 \cos \lambda h \cos h \lambda h & && \\ \cos \lambda h + \cos h \lambda h &= -1 \end{aligned}$$

ecuación que se satisface con los valores

$$\begin{aligned} \lambda_1 h &= 1.875 \\ \lambda_2 h &= 4.694 \\ \lambda_3 h &= 7.855 \\ &\dots \end{aligned}$$

etc. (Timoshenko, Obra citada, p. 234)

La condición 6)

$$\cos \lambda h \cdot \cos h \lambda h = -1$$

es necesaria también para que haya vibración libre, o sea los valores de λ deben ser los mismos y por consiguiente los períodos de que éstas dependen. En efecto, para la vibración libre la base debe permanecer inmóvil, o sea, la ecuación 1) queda

$$\begin{aligned} (\Lambda \operatorname{sen} k t + B \cos k t) (C_2 + C_4) &= 0 \\ \text{o sea } C_2 + C_4 &= 0 && C_2 = -C_4 \end{aligned}$$

para lo cual $\frac{\mu}{\nu} = -1$ o sea $\mu + \nu = 0$ que es la ecuación que ya teníamos.

De esta manera es muy fácil deducir el período de vibración libre τ de cualquier pieza prismática empotrada en su base.

Basta con hacer.

$$\lambda h = 1.875$$

$$h \cdot \sqrt[4]{\frac{k^2 \rho s}{E I}} = 1.875$$

$$h^2 k \sqrt{\frac{\rho s}{E I}} = 1.875^2$$

en que k vale $\frac{2\pi}{\tau}$ según vimos anteriormente.

Luego

$$\frac{2\pi}{\tau} \sqrt{\frac{\rho \cdot s}{E I}} h^2 = 1.875^2$$

y haciendo $d = \frac{2\pi}{1.875^2} = 1.788$ $\tau = d \cdot h^2 \sqrt{\frac{\rho \cdot s}{E I}}$

Para piezas que no sean prismáticas Briske da los siguientes valores

Cono hueco $d = 0.719$ (valor teórico)

Tronco de cono hueco $d = 0.719 + 1.07 \frac{l'}{l+l'} + 0.15 - 0.6 \left(0.5 - \frac{l'}{l+l'} \right)$

Cuña $d = 1.788 - 0.605 \left(1 - \frac{l'}{l+l'} \right)^3$

siendo l la altura real y l' la altura de la parte que falta. (1)

Para estudiar la estabilidad de una torre o de una chimenea, lo que interesa es conocer los valores de los esfuerzos de corte y de los momentos flexionantes en las diferentes secciones. El valor de ellos puede determinarse, ya que el momento flexionante M en una sección vale

$$M = E I \frac{d^2 u}{d z^2}$$

y el esfuerzo de corte

$$Q = -E I \frac{d^3 u}{d z^3}$$

(1) Ver Briske Die Erdbebensicherheit von Bauwerken. W. Ernet. Berlin, 1927).

Los valores de $\frac{d^2u}{dz^2}$ y $\frac{d^3u}{dz^3}$ se obtienen derivando la ecuación (5), y sus valores máximos y las secciones en que se producen no dependen sólo de las características de la pieza (E, I, ρ, S, h), sino que también del período y amplitud del embolo (1).

II.—PRISMA CON FUNDACIÓN ELÁSTICA

El caso tratado anteriormente del prisma empotrado en su base, aunque teóricamente muy interesante, no es el común en la realidad. Todos los terrenos de fundación se deforman—algunos más y otros menos—bajo la acción de las cargas, de tal manera que parece poco probable el que se pueda considerar la pieza como rígidamente empotrada en su base. Por esto ensayaremos de estudiar a continuación el caso de que la fundación se encuentre en un suelo elástico.

Consideremos que un prisma unido rígidamente a su fundación, la que supondremos indeformable, transmita a ésta, además de la carga, un momento flexionante M . La superficie del terreno en contacto con la fundación se encuentra solicitada por compresión y flexión. Como, por hipótesis, permanece plana al deformarse y se considera el terreno elástico, rigen para esa superficie las condiciones en que se estableció la fórmula fundamental de la flexión, de manera que también es válida para ella.

Así, llamando σ_t la fatiga máxima sobre el terreno, σ_c la debida a la compresión y σ_f la debida a la flexión, tenemos

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \sigma_c + \sigma_f \\ \sigma_c &= \frac{P}{S} \\ \sigma_f &= M \frac{l}{I_t} \end{aligned}$$

en que I_t es el momento de inercia del plano de contacto de la fundación con el terreno, respecto al eje horizontal que pasa por el pie del prisma.

Si llamamos E_t la presión necesaria para que el suelo se deforme un centímetro, el desplazamiento del extremo de la zapata respecto al centro, es

$$\delta = \frac{\sigma_f}{E_t}$$

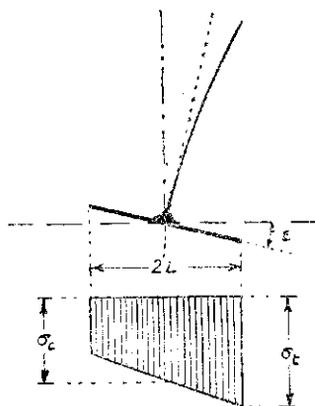


Fig. 2

(1) Algunas aplicaciones prácticas se pueden encontrar en Briske, obra citada, y en C. Lira: «Estabilidad sísmica de las construcciones», ANALES DEL INSTITUTO DE INGENIEROS DE CHILE, Octubre de 1929, aunque tratan el asunto en forma algo diferente.

de manera que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varepsilon &= \frac{\delta}{l} = \frac{\sigma_f}{E_t l} \\ &= \frac{M l}{E_t \cdot l \cdot I_t} = \frac{M}{E_t I_t} \end{aligned}$$

pero al mismo tiempo, por ser la unión rígida,

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{para } z=0$$

o sea

$$\frac{M}{E_t I_t} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0}$$

Considerando el prisma, la ecuación de la elástica da

$$\frac{M}{E_p I_p} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_{z=0}$$

siendo E_p e I_p valores correspondientes al prisma.

De aquí se desprende que la condición de terreno de fundación elástica equivale a

$$E_t I_t \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = E_p I_p \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_{z=0}$$

en reemplazo de $\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = 0$ que teníamos en el caso del prisma perfectamente empotrado. Las condiciones en los extremos quedan entonces

1) Para $z=0$ $u = a \operatorname{sen} \omega t$ (movimiento del temblor)

2) Para $z=0$ $\frac{\partial u}{\partial z} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ $\beta = \frac{E_p I_p}{E_t I_t}$

3) Para $z=h$ $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ (momento nulo)

4) Para $z=h$ $\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 0$ (esfuerzo de corte nulo)

y tenemos que imponérselas a la ecuación

$$u = (A \operatorname{sen} kt + B \cos kt) (C_1 \operatorname{sen} \lambda z + C_2 \cos \lambda z + C_3 \operatorname{sen} h \lambda z + C_4 \cos h \lambda z)$$

Siguiendo una marcha análoga a la seguida anteriormente, y llamando

$$\alpha' = \text{sen } \lambda h \cos h \lambda h + \text{sen } h \lambda h \cos \lambda h + \beta \lambda (\cos \lambda h \cos h \lambda h + \text{sen } \lambda h \text{sen } h \lambda h - 1)$$

$$\mu' = \cos \lambda h \cos h \lambda h - \text{sen } \lambda h \text{sen } h \lambda h + 1 + \beta \lambda (\cos \lambda h \text{sen } h \lambda h - \text{sen } \lambda h \cos h \lambda h)$$

$$\nu' = 1 + \cos \lambda h \cos h \lambda h + \text{sen } \lambda h \text{sen } h \lambda h - \beta \lambda (\text{sen } \lambda h \cos h \lambda h - \cos \lambda h \text{sen } h \lambda h)$$

$$\gamma' = -\text{sen } \lambda h \cos h \lambda h - \cos \lambda h \text{sen } h \lambda h + \beta \lambda (1 + \text{sen } \lambda h \text{sen } h \lambda h - \cos \lambda h \cos h \lambda h)$$

deducimos

De condición 1) $k = \omega \quad B = 0 \quad \Lambda (C_2 + C_4) = \alpha$

De 2), 3) y 4)

$$C_1 = \frac{\alpha'}{\nu'} C_4$$

$$C_2 = \frac{\mu'}{\nu'} C_4$$

$$C_3 = \frac{\gamma'}{\nu'} C_4$$

Sustituyendo y ordenando obtenemos en fin

$$6) \quad u = \frac{\alpha \text{sen } \omega t}{\mu' + \nu'} (\alpha' \text{sen } \lambda z + \mu' \cos \lambda z + \gamma' \text{sen } h \lambda z + \nu' \cos h \lambda z)$$

Se producirá resonancia si $\mu' + \nu' = 0$

o sea

$$1 + \cos \lambda h \cos h \lambda h + \lambda \beta (\cos \lambda h \text{sen } h \lambda h - \text{sen } \lambda h \cos h \lambda h) = 0$$

Estudiamos el caso de un muro de concreto armado de 5 m. de altura, de 30 cm. de espesor, y veamos como varía λ con la calidad de la fundación.

$$\begin{aligned} h &= 5 \text{ m.} \\ E_p &= 210000 \text{ kg/cm}^2 = 2.1 \cdot 10^9 \text{ kg/m}^2 \\ I_p &= \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 0.3^3 = \\ I_t &= \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot b^3 \text{ siendo } b \text{ el ancho de la fundación} \end{aligned}$$

o sea

$$\beta = \frac{2.1 \cdot 10^9 \cdot 0.3^3 \cdot 12}{E_t \cdot b^3 \cdot 12} = \frac{5.67 \cdot 10^7}{E_t \cdot b^3}$$

y $1 + \cos 5 \lambda \cos h 5 \lambda + \lambda \beta (\cos 5 \lambda \text{sen } h 5 \lambda - \text{sen } 5 \lambda \cos h 5 \lambda) = 0$

Dando a λ distintos valores, se obtiene

1 λ	2 $\text{sen } \lambda h$	3 $\text{cos } \lambda h$	4 $\text{sen } h \lambda h$	5 $\text{cos } h \lambda h$	6 $\text{cos } \lambda h \cdot \text{cos } h \lambda h$	7 $\text{cos } \lambda h \cdot \text{sen } h \lambda h$	8 $\text{sen } \lambda h \cdot \text{cos } h \lambda h$	9 1 · [7-8]	10 β	
0,375	—	—	—	—	—	—	—	—	0	empotramiento perfecto
0,3	0,9975	0,0706	2,1293	2,3524	0,1659	0,1503	2,345	0,6585	1,77	
0,2	0,8415	0,5402	1,1752	1,5431	0,8345	0,6350	1,2990	0,1327	13,8	
0,15	0,6820	0,7314	0,8223	1,2947	0,9485	0,6005	0,8840	0,0411	47,3	
0,1	0,4794	0,8775	0,5211	1,1276	0,9890	0,4570	0,5400	0,0083	240	

Para $\lambda = \frac{1.875}{5} = 0.375$ $\beta = 0$ (suelo indeformable)

$= 0.3$ $= 1.77$

$= 0.2$ $= 13.8$

$= 0.15$ $= 47.3$

$= 0.1$ $= 240.$

Como $\lambda = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho s}{E_p I_p}}$ y $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$

$\lambda^2 = \frac{2\pi}{\tau} \sqrt{\frac{\rho \cdot s}{E_p I_p}}$ $\tau = \frac{2\pi}{\lambda^2} \sqrt{\frac{\rho \cdot s}{E_p I_p}}$

y en este caso

$\rho = \frac{2400}{g}$ $s = 0.3$

$\sqrt{\frac{\rho \cdot s}{E_p I_p}} = \sqrt{\frac{2400 \cdot 0.3 \cdot 12}{g \cdot 2.1 \cdot 10^9 \cdot 0.3^3}} = 0.00396$

$\tau = \frac{2\pi}{\lambda^2} \cdot 0.00396$

Para $\lambda = 0,375$ $\tau = 0,178$ $\beta = 0$

$= 0,3$ $= 0,277$ $= 1,77$

$= 0,2$ $= 0,633$ $= 13,8$

$= 0,15$ $= 1,11$ $= 47,3$

$= 0,1$ $= 2,49$ $= 240$

Con estos valores se ha dibujado la curva. En ella se ve que cuanto más grande es β — o sea más pequeño el producto $E_i I_i$ — tanto mayor es el período de vibración libre, lo que es peligroso, pues conviene que sea menor que el período de los temblores para evitar resonancia.

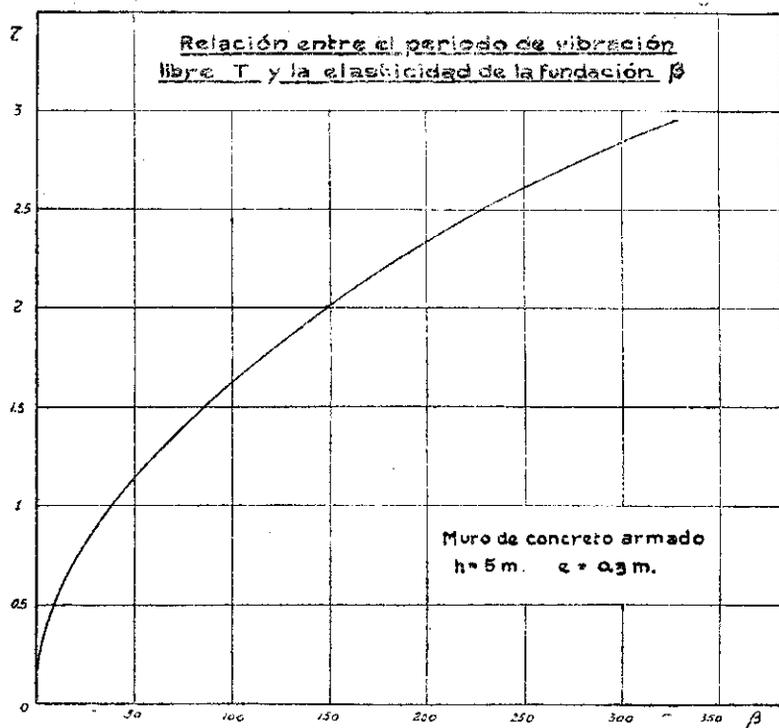


Fig. 3

En cuanto a E_f vale para Santiago ($\sigma_t \leq 4 \text{ kg/cm}^2$) según experiencias de Dn. Alfredo Lagarrigue, alrededor de 600 000 Kg/m².

III.—ESTRUCTURAS EN FORMA DE ESQUELETO

Hasta ahora hemos estudiado la vibración de construcciones cuya deformación de conjunto puede asimilarse a la de un prisma flexionado. A esta categoría pertenecían las chimeneas, columnas y los muros aislados. Nos queda por estudiar pues, la vibración de las estructuras en forma de esqueleto, que consisten en pisos que reciben directamente las cargas transmitiéndolas a su vez a los elementos verticales soportantes o pilares, unidos rígidamente a ellos.

Si consideramos la manera como se deforma una de estas estructuras, vemos que los pilares se flexionan manteniéndose sus extremos superiores todos al mismo nivel, ya que son despreciables las deformaciones causadas por diferencias de esfuerzos axiales en las columnas. Los pisos se mantienen, pues, horizontales, salvo las pequeñas

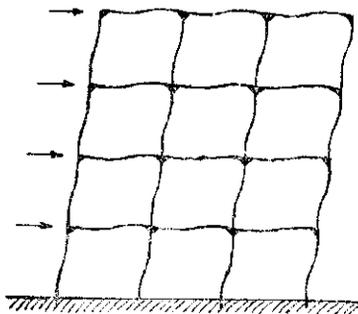


Fig. 4

ondulaciones debidas a que las vigas no son infinitamente rígidas respecto a los pilares con los cuales forman ángulos que hemos supuesto invariables. Llegamos así a la conclusión de que la construcción se deforma por el deslizamiento de los pisos uno respecto a otro, manteniéndose horizontales de modo que podemos asimilar su estudio al de un cuerpo que se deforme únicamente por esfuerzo de corte.

Tomando los mismos ejes coordenados que anteriormente, la ley de Hooke nos da en este caso

$$Q = G \frac{du}{dz}$$

Siendo Q el esfuerzo de corte en una sección de cota z y G la fuerza que produce una deformación angular unitaria.

Si derivamos y suponemos G constante tenemos

$$\frac{dQ}{dz} = G \frac{d^2u}{dz^2} = -p$$

Por el principio D'Alembert p es la fuerza de inercia desarrollada al oscilar el cuerpo y es por lo tanto igual a

$$p = -s \cdot \rho \frac{d^2u}{dt^2}$$

en que $\rho \cdot s$ es la masa del cuerpo por unidad de altura, supuesta distribuída uniformemente.

Tenemos por consiguiente.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{s \rho}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ecuación cuya integral es —como en el caso de las varillas— un producto de dos funciones, una que depende sólo de t y la otra sólo de z , si nos limitamos a estudiar sólo los modos normales de vibrar que es el caso que nos interesa. Por lo tanto

$$u = \varphi(t) \cdot f(z)$$

en que $\varphi(t)$ es una función armónica del tiempo que se representa por

$$\varphi(t) = A \operatorname{sen} kt + B \operatorname{cos} kt$$

Sustituyendo en la ecuación diferencia y si llamamos

$$q = \sqrt{\frac{G}{s \cdot \rho}}$$

$$(A \operatorname{sen} kt + B \operatorname{cos} kt) \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = \frac{1}{q^2} \left[-k^2 (A \operatorname{sen} kt + B \operatorname{cos} kt) \right] f(z)$$

$$\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = - \frac{k^2}{q^2} f(z)$$

ecuación que se satisface para $f(z) = \operatorname{sen} \frac{k}{q} z$ y $\operatorname{cos} \frac{k}{q} z$ y cuya integral general es por lo tanto

$$f(z) = C_1 \operatorname{sen} \frac{k}{q} z + C_2 \operatorname{cos} \frac{k}{q} z$$

como puede comprobarse sin dificultad, dirivándola dos veces respecto a t y a z .

La función $\varphi(t)$ define la amplitud y el período del movimiento cuando se fijan los valores de las constantes A , B y k . En nuestro caso estos resultan de la condición de vibración forzada. La función $f(z)$ determina la forma de la vibración y el valor de las constantes C_1 y C_2 se puede deducir fácilmente de las condiciones de los extremos. En el caso particular que estudiamos las condiciones son las siguientes:

a) La base debe seguir el movimiento del suelo, que según vimos, podía representarse durante el temblor por

$$y = a \operatorname{sen} \omega t$$

De aquí que para

$$z = 0 \quad u = y = a \operatorname{sen} \omega t$$

b) En el extremo superior libre no actúa ninguna fuerza, por lo tanto el esfuerzo de corte es nulo

$$\text{Para } z = h \quad \frac{du}{dz} = 0$$

Estas condiciones equivalen a

$$1) \quad a \operatorname{sen} \omega t = (A \operatorname{sen} kt + B \operatorname{cos} kt) C_2$$

de donde se deduce

$$\begin{aligned} k &= \omega \\ B &= 0 \\ a &= A C_2 \quad \text{o sea } A = \frac{a}{C_2} \end{aligned}$$

$$2) \quad \frac{a}{C_2} \operatorname{sen} \omega t \cdot \frac{\omega}{q} \left(C_1 \operatorname{cos} \frac{\omega}{q} h - C_2 \operatorname{sen} \frac{\omega}{q} h \right) = 0$$

de donde

$$C_1 = C_2 \operatorname{tang} \frac{\omega}{q} h$$

Sustituyendo estos valores y haciendo algunas transformaciones, queda

$$u = a \operatorname{sen} \omega t \frac{\cos \frac{\omega}{q} (h-z)}{\cos \frac{\omega}{q} h}$$

Habr  resonancia si

$$\cos \frac{\omega}{q} h = 0$$

o sea

$$\frac{\omega}{q} h = \frac{2n+1}{2} \pi$$

$$h = \frac{2n+1}{2} \pi \frac{q}{\omega}$$

Como

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad h = \frac{2n+1}{4} q T \quad T = \frac{4}{2n+1} \frac{h}{q}$$

lo que equivale a decir que hab  resonancia para un valor de h si el período del temblor es igual al período crítico $T_c = 4 \frac{h}{q}$, ($n=0$), o es tres veces menor, ($n=1$),

5 veces menor ($n=2$), etc., y para un valor dado de T si $h = h_c = \frac{1}{4} q T$, ($n=0$); $h = 3 h_c$; $h = 5 h_c$, etc.

En las figuras que se encuentran a continuación se han dibujado las elásticas extremas correspondientes a la ecuación:

$$u = a \operatorname{sen} \omega t \frac{\cos \frac{\omega}{q} (h-z)}{\cos \frac{\omega}{q} h}$$

para $a=1$ y para los siguientes valores:

- | | | | |
|----|--------------------------------------|------------------------------------|----------------------------|
| 1) | $\frac{\omega}{q} h = \frac{\pi}{4}$ | $T = 8 \frac{h}{q}$ | |
| 2) | $\frac{\omega}{q} h = 1.3$ | $T = \frac{2\pi}{1.3} \frac{h}{q}$ | |
| 3) | $\frac{\omega}{q} h = \frac{\pi}{2}$ | $T_c = 4 \frac{h}{q}$ | resonancia
$u = \infty$ |
| 4) | $\frac{\omega}{q} h = 2$ | $T = \pi \frac{h}{q}$ | |
| 5) | $\frac{\omega}{q} h = \pi$ | $T = 2 \frac{h}{q}$ | |
| 6) | $\frac{\omega}{q} h = 2\pi$ | $T = \frac{h}{q}$ | |

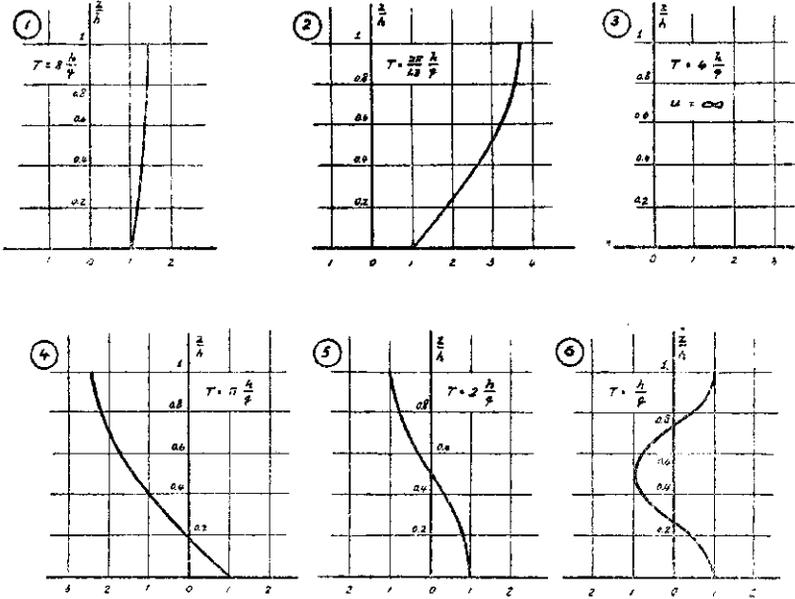


Fig. 5

Se ve que para valores de T menores que $4 \frac{h}{q}$ — o para valores de h mayores que h_c —hay puntos que permanecen fijos o nodos.
 La condición necesaria para la formación de nodos es

$$\cos \frac{\omega}{q} (h-z) = 0$$

$$\frac{\omega}{q} (h-z) = \frac{2n+1}{2} \pi$$

$$z = h - \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{\omega}{q} \pi$$

o sea a las cotas $z_1 = h - h_c$, $z_2 = h - 3h_c$... etc.

El período de vibración libre τ como demostramos anteriormente, se puede deducir también de la condición de resonancia. Si

$$\frac{\omega}{q} h = \frac{2n+1}{2} \pi \quad \text{y} \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

$$\tau = 2\pi \frac{h}{q} \frac{2}{(2n+1)\pi} = \frac{4}{2n+1} \frac{h}{q}$$

El mayor es por lo tanto $\tau = 4 \frac{h}{q}$ ($n=0$) y los otros serán $1/3, 1/5$ etc. del fundamental.

Trataremos de estudiar a continuación la razón entre el esfuerzo de corte máximo que se produce en un cuerpo que vibra debido a un temblor y el que resulta de suponer una carga horizontal uniforme equivalente al producto de su peso por la aceleración máxima del movimiento sísmico.

En el primer caso

$$Q_d = G \frac{du}{dz} = Ga \operatorname{sen} \omega t \frac{\omega}{q} \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega}{q}(h-z)}{\cos \frac{\omega}{q} h}$$

Como primera condición para Q_d sea máximo vemos que $\operatorname{sen} \omega t$ debe ser igual a 1, lo que equivale a decir que u debe ser máximo.

A continuación hay que distinguir dos casos según que h sea menor o mayor que la altura crítica, h_c pasada la cual se forman nodos. En el primer caso Q_d es máximo cuando $\frac{\omega}{q}(h-z)$ es máximo, o sea cuando $z=0$ lo que corresponde a la sección de la base.

Se llega entonces al valor

$$\begin{aligned} Q_d &= a \frac{\omega}{q} \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega}{q} h}{\cos \frac{\omega}{q} h} \cdot G \\ &= a \frac{\omega}{q} \cdot \operatorname{tang} \frac{\omega}{q} h \cdot G \end{aligned}$$

El esfuerzo de corte que se produce suponiendo una carga uniforme igual al producto del peso por el coeficiente sísmico ε es

$$Q_e = \rho \cdot s \cdot g \cdot \varepsilon \cdot h$$

pero

$$\varepsilon = \frac{4\pi^2}{g T^2} \quad \alpha = \frac{\omega^2 a}{g}$$

$$Q_e = \rho \cdot s \cdot \omega^2 \cdot a \cdot h$$

y haciendo la razón

$$\frac{Q_d}{Q_e} = \frac{a \frac{\omega}{q} \cdot G \cdot \operatorname{tang} \frac{\omega}{q} h}{\rho \cdot s \cdot \omega^2 \cdot a \cdot h}$$

y como

$$\frac{G}{\rho \cdot s} = q^2$$

y sustituyendo h por $\frac{q \tau}{4}$ como encontramos anteriormente, y ω por $\frac{2 \pi}{T}$

$$\frac{Q_d}{Q_e} = \frac{\text{tang} \frac{\pi}{2} \frac{\tau}{T}}{\frac{\pi}{2} \frac{\tau}{T}}$$

Esta ecuación se ha dibujado en el gráfico adjunto (fig. 6) en el que se vé que para $\tau = T P_d$; $P_e = \infty$ y para que $P_d \leq 2 P_e$, por ejemplo, debe ser $\tau = 0,75 T \dots$ etc.

En el caso de que h sea mayor que h_c , o sea $\tau > T$, los esfuerzos de corte máximos se producen en los nodos, pues ahí $\frac{du}{dz}$ es máximo. Como estos no son puntos fijos, sino que su ubicación depende de la amplitud y período del temblor, y sobre todo debido a que éste puede coincidir con alguno de los períodos propios del edificio, p. ej., $\tau_1 = \frac{\tau_0}{3}$, $\tau_2 = \frac{\tau_0}{5} \dots$ etc. y producirse por lo tanto el fenómeno de resonancia, se ve que este caso debe evitarse al tratar de construir edificios asísmicos.

De lo expuesto anteriormente se deduce la enorme importancia del período de vibración libre, propio de una construcción, ya que de su relación con el del temblor depende principalmente la magnitud de las fuerzas horizontales que obren sobre ellas y por consiguiente la mayor o menor probabilidad de sufrir perjuicios con un terremoto.

Esto coincide exactamente con lo observado en el terremoto de 1923 en Tokio. En efecto, ya anteriormente el Dr. Omori había medido los períodos de vibración libre de los principales edificios (los más altos de 30 m. y 8 o nueve pisos). Estos variaban de 0.4 a 1.1 segundos y después del temblor se pudo comprobar (1) que los daños sufridos por ellos habían sido tanto mayores cuanto más grande era el

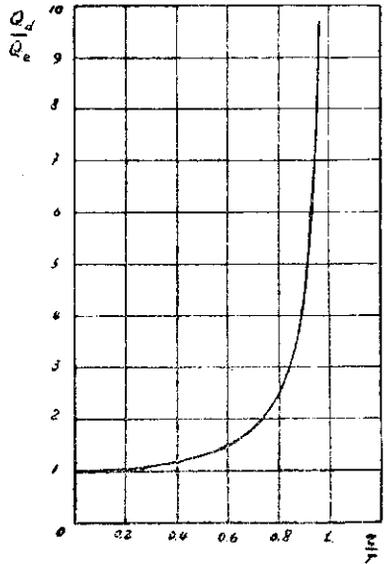


Fig. 6

(1) (Véase T Naito, Earthquake, prof. Constructions, apéndice II).

período propio de oscilación. Los mayores perjuicios ocurrieron según pudo observarse en los pisos inferiores, salvo algunos casos en que éstos erran extraordinariamente reforzados y entonces se producían en el piso débil más bajo.

Cuando los edificios tienen una altura mayor que la crítica, dijimos que la sollicitación máxima debía producirse en los nodos. Esto se comprueba con lo ocurrido al Claus Spreckles Building de San Francisco, cuya altura es de 96 mts. y cuyo período propio es de 2.2 segs., según la medida del Prof. Hall (1), en el cual los daños se localizaron entre el 10º y el 16º pisos, a una altura aproximadamente dos tercios del total.

Para terminar, trataremos de formarnos una idea del valor que tiene G en los casos de la práctica. Consideremos para esto un piso de un edificio y estudiemos la deformación de una columna, ya que podemos suponer que todos se deformen igualmente dada la gran rigidez del piso. Llamemos P la fuerza horizontal que recibe en su extremo superior debido al temblor y l la altura de piso. La flecha será entonces

$$f = \alpha \frac{P l^3}{E I}$$

siendo α un coeficiente que depende de la razón entre la rigidez de las vigas del piso y la rigidez de la columna. (Para extremo libre $\alpha = \frac{1}{3}$, para piso infinitamente rígido $\alpha = \frac{1}{12}$ y en la práctica generalmente α vale alrededor de 0.2).

Para que la misma carga P produjera en la columna igual deformación, considerando sólo el esfuerzo de corte, sería necesario que ésta tuviera un coeficiente de elasticidad al cizalle tal que

$$f = \frac{P}{G_c} l$$

Igualando ambas flechas y considerando que P debe ser el mismo en ambos casos, podemos obtener el coeficiente ficticio de la columna que viene a ser la fuerza necesaria para producirle una deformación angular unitaria

$$\alpha \frac{P l^3}{E I} = \frac{P}{G_c} l$$

$$G_c = \frac{E I}{\alpha} \frac{1}{l^2}$$

La fuerza necesaria para producir la misma deformación en el edificio será tantas veces mayor cuanto sea el número de pilares de éste, de manera que G del edificio, considerado como un conjunto, será n veces G_c si llamamos n aquel mismo número. Luego

$$G = \frac{E I}{\alpha} \frac{n}{l^2}$$

(1) (Ver A. D. Dewell, Report of Committee on Building for Safety against Earthquakes, Bull. Seism. Soc. Am. September 1925).

Supongamos un edificio de concreto armado $E=210000$ cuyos pisos sean de 4 m. de altura y cuyos pilares que reciben una carga de m metros cuadrados por piso tengan un momento de inercia medio de $\frac{0.5^4}{12}$ mt. (columnas cuadradas de 50 cm. de cara). La carga total por mt^2 y por piso (incluidos sobrecarga, pilares, tabiques, etc.) la supondremos de 1500 kgs., de manera que si tomamos $m = 25 \text{ mt}^2$ ($5 \cdot 5 \text{ mt.}$)

$$\rho = \frac{1500}{g h} = \frac{1500}{9.8 \cdot 4} = 38.2$$

$$s = n \cdot m = 25 n$$

$$G = \frac{2.1 \cdot 10^{10} \cdot 0.5^4 \cdot n}{0.2 \cdot 12 \cdot 16} = 3.4 \cdot n \cdot 10^6$$

por lo tanto

$$\sqrt{\frac{G}{\rho \cdot s}} = \sqrt{\frac{3.4 \cdot 10^6 \cdot n}{38.2 \cdot 25 \cdot n}} = 59.6$$

Como el período de vibración libre vale

$$\tau = 4 \frac{h}{q} = 4 h \sqrt{\frac{\rho \cdot s}{G}}$$

obtenemos finalmente

$$\tau = \frac{4}{59.6} h = 0.067 h$$

o sea para

$$h = 30 \text{ mts.} \quad \tau = 2.01 \text{ segs.}$$

Este valor es poco mayor que los corrientes en la práctica, lo que podría significar que los edificios con pilares únicamente y sin muros, no son recomendables por su falta de rigidez que se traduce en un período de vibración libre muy grande. La manera de evitar esto es haciendo muros resistentes, solución que además es muy apropiada para soportar esfuerzos horizontales, como veremos en la 3.ª parte.

La fórmula anterior se puede poner en una forma que permite ver esto más claro y formarse idea de la importancia de los distintos factores. En efecto

$$\tau = 4 h \sqrt{\frac{\rho \cdot s}{G}}$$

pero $\rho = \frac{Q}{g} \cdot \frac{p}{h}$ siendo Q el peso de cada piso y p su número.

A su vez

$$G = \frac{E I}{\alpha} \frac{n}{h^2} = \frac{E I}{\alpha} \cdot n \cdot \frac{p^2}{l^2} \quad \text{porque } h = pl$$

y sustituyendo en τ

$$\tau = 4 h \sqrt{\frac{Q}{g} \cdot \frac{p}{h} \frac{\alpha h^2}{E I n p^2}} = 4 h \sqrt{\frac{h}{p} \frac{\alpha Q}{n g E I}}$$

De aquí se desprende que T crece al aumentar n , Q o α y se achica al crecer p , n , E o I . Para un edificio dado lo único que se puede variar fácilmente es nI , que representa la suma de los momentos de inercia de los pilares, la cual es susceptible de agrandarse mucho agregando muros resistentes que tienen gran I . Esto concuerda ampliamente con lo observado en Japón. El «Marunouchi Building», un edificio de 30 mts. de altura con esqueleto metálico, tenía períodos de vibración de 0.89 s. (Este-Oeste) y de 0.94 s. (Norte-Sur) cuando ocurrió el terremoto de Abril de 1922. A consecuencia de éste sufrió serios perjuicios y sus períodos propios aumentaron a 1.09 s. (E. O.) y 1.013 s. (N. S.) debido a la pérdida de rigidez (aumento de α y disminución de E). Fué reforzado entonces por la agregación de numerosos muros y aún de diagonales, en los pisos inferiores. Con esto los períodos de vibración bajaron a 0,67 segs. E-O) y 0,71 segs. (N-S). Gracias a este refuerzo, en el gran terremoto de Septiembre de 1923 sufrió relativamente poco, localizándose los daños sobre el 3.^{er} piso o sea donde no se había reforzado...

El mismo fenómeno de aumento del período de vibración fué observado también en otros edificios (1).

(Continuará).

(1) Véase T. Naito. Earthquake, Proof. Construction, Apéndice II.