**ARTURO QUINTANA**

Profesor de Topografía de la
Escuela de Ingeniería

# Nuevo método de compensación de poligonales taquimétricas

## GENERALIDADES

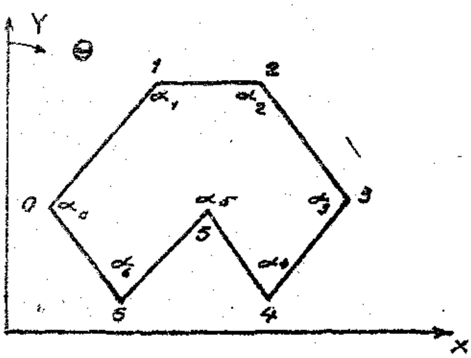
Las Poligonales en general, se clasifican en **cerradas y continuas o abiertas.**

Al primer grupo, especialmente interesante desde el punto de vista del control de las observaciones, pertenecen las siguientes:

1) Las que parten de un punto cualquiera y terminan en el mismo, formando por si solas un polígono cerrado, y

2) Las que parten de un vértice de triangulación o punto conocido y terminan en otro punto similar, completando un polígono cerrado con la recta que une dichos puntos.

En estos dos casos fundamentales o variantes de ellos, es posible controlar las observaciones por sus resultados y proceder a la compensación de los errores cometidos.




(Fig. 1).

El control de las observaciones se hace sometiéndolas a las condiciones siguientes:

a) **Condición de los ángulos. —** se debe verificar, llamando

$$\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots . \alpha_n$$

los ángulos interiores de la Poligonal:

$$\Sigma \alpha = (n-2)\ 200^g \qquad (1)$$

b) **Condición de las distancias. —** Se debe verificar, refiriendo la poligonal a un sistema de coordenadas y llamando l (con sub-índice) los lados, y $\Theta$ (con sub-índice), los azimutes correspondientes:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma l \text{ sen } \theta &= D_x \\ \Sigma l \cos \theta &= D_y \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$D_x$ y $D_y$ son las diferencias de coordenadas de los dos vértices de apoyo. En caso que la poligonal cierre en el punto de partida, son nulas y las condiciones (2) se transforman en:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\, l \text{ sen } \theta = Do_x \\ \Sigma\, l \cos \theta = Do_y \end{array}\right\} \quad (2 \text{ bis})$$

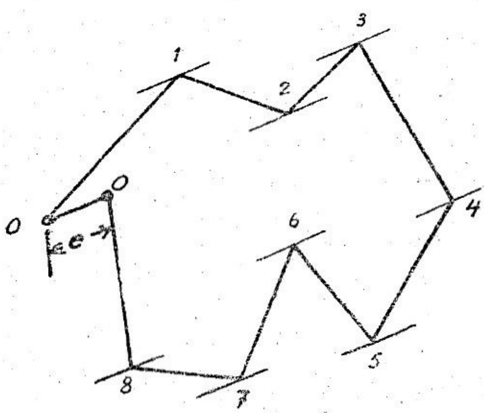
Debido a los inevitables eroes de observación se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\, \alpha = (n-2)\ 200^g + d \\ \Sigma\, l \text{ sen } \theta = D_x + e\,x \\ \Sigma\, l \cos \theta = D_y + e\,y \end{array}\right\} \quad (3)$$

Consideremos una poligonal cerrada 0, 1, 2, 3..... (Fig. 2).

Al hacer el dibujo de la poligonal o el cálculo de sus coordenadas, partiendo del punto 0, vamos a obtener para el mismo punto considerado como término de la poligonal una posición o bien coordenadas que corresponden a un punto 0' distinto de 0.

La compensación consiste en corregir la posición o las coordenadas de cada uno de los vértices, incluyendo 0', que debe ir a 0.




(Fig. 2).

## METODOS DE COMPENSACION

Numerosos son los procedimientos que se emplean para la compensación de los errores; pero los podemos clasificar en los grupos siguientes:

a) Métodos empíricos;
b) Métodos analíticos;

a) **Métodos empíricos.** — Estos consisten en desplazar todos los vértices paralelamente a la dirección del error de cierre.

Existen dos criterios respecto a la magnitud de este desplazamiento, a saber:

1) **Desplazamiento $\Delta$ K proporcional al número de orden del vértice a partir del origen.** — Para un vértice de orden k, se tiene:

$$\triangle_k = \frac{e}{n} K \qquad (4)$$

En esta fórmula e es el error lineal de cierre y n es el número de vértices.

2) **Desplazamiento $\triangle K$, proporcional al desarrollo de la poligonal, desde el origen al vértice.** — Para un vértice de orden k, se tiene:

$$\triangle_k = \frac{\sum_o^k l}{L} e \qquad (5)$$

En esta fórmula $\sum_o^k . l$ es el desarrollo de la poligonal, desde el origen al vértice de orden K y L, es el desarrollo total.

b) **Métodos Analíticos**

1) **Procedimiento Riguroso.** — Es el procedimiento más racional y exacto; pero es por lo general tan laborioso que su uso no siempre se justifica.

Se deriva de la aplicación directa de la Teoría de los Errores a las observaciones, abordando simultáneamente las condiciones de los ángulos y de las distancias. Es sólo susceptible de cálculo analítico, no siendo posible su resolución geométrica, lo que limita más su empleo.

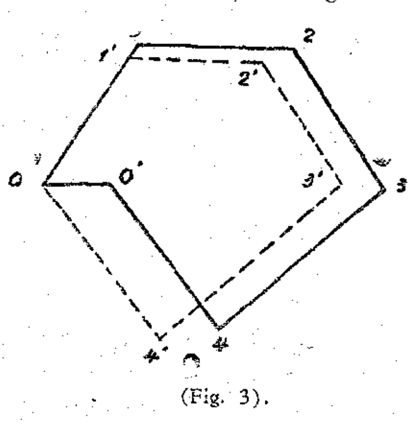
2) **Procedimientos Simplificadores.** — Se derivan de la aplicación de la Teoría de los Errores a las observaciones, pero abordando separadamente la condición de los ángulos y de las distancias.

Se procede primeramente a la corrección de los ángulos en forma analítica, de acuerdo con su propio error de cierre.

Una vez corregidos los ángulos, se acepta que todo el error de cierre de la poligonal, construída o calculada con los ángulos corregidos, se debe a errores en la longitud de los lados.

Esto quiere decir que, si una vez corregidos los ángulos, construímos la poligonal o calculamos sus coordenadas, y no se verifica el cierre, debemos modificar la posición o las coordenadas de los vértices, de tal manera que los nuevos lados, queden paralelos a los correspondientes de la poligonal primitiva.

En esta forma, los ángulos de la nueva poligonal son iguales a los de la primitiva, y sólo la longitud de los lados ha sido modificada en esta segunda etapa de la compensación. (Fig. 3).



(Fig. 3).

**Discusión de los Métodos Anteriores.** — Si se pretende usar métodos relativamente expeditos y susceptibles de construcción gráfica, queda descartado el empleo del método analítico riguroso.

En cuanto a los métodos empíricos, es interesante hacer ver el efecto que produce sobre los lados, el desplazamiento de los vértices, paralelamente a una dirección dada (dirección del error de cierre).

Consideremos los casos siguientes:

a) **El lado es paralelo al error de cierre.** — En este caso el desplazamiento de sus vértices produce solamente una modificación en la longitud del lado.

b) **El lado es normal al error de cierre.** — En este caso, el desplazamiento de sus vértices produce solamente una modificación en la orientación del lado.

c) **El lado tiene una dirección cualquiera.** — En este caso el desplazamiento de sus vértices produce una modificación, tanto en la longitud como en la orientación del lado.

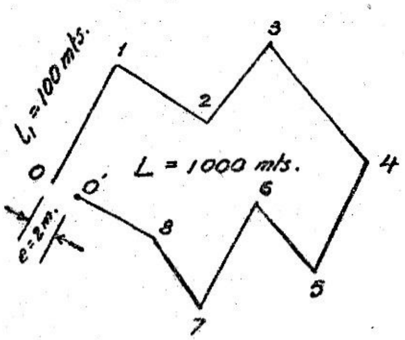
Ahora bien, en las poligonales taquimétricas, las orientaciones se obtienen en el limbo con una precisión muy superior a las de las distancias que se obtienen con la estadía, estando sus errores probables en la relación aproximada:

$$\frac{e_\alpha}{e_d} < \frac{1}{10}$$

en que $e_\alpha$ es el error probable en la posición de un vértice debido al error angular y $e_d$ es el error probable de las distancias.

La aplicación de los métodos empíricos equivale a dar igual orden de magnitud a la corrección en las distancias que a la corrección de las orientaciones, lo que en el caso de las poligonales taquimétricas, se aparta de la realidad.

Ilustremos ésto con un ejemplo: (Fig. 4).




(Fig. 4)

Sea $L = 1000$ metros
$e = 2$ metros
$n = 9$

Sea además $l_1 = 100$ metros, normal al error de cierre:

El primer criterio da:

$$\Delta_1 = \frac{1}{9} \times 2 = 0.22 \text{ mts.}$$

que corresponde a un cambio de orientación $\Delta\Theta = 14$ minutos centesimales.

El segundo criterio da:

$$\Delta_1 = \frac{100}{1000} \times 2 = 0.20 \text{ mts.}$$

que corresponde a un cambio de orientación $\Delta\Theta$ = **12.5 minutos.**

Ambos resultados no son razonables en trabajos taquímetros, cuya aproximación es normalmente de un minuto centesimal.

Todo lo anterior, nos lleva pues a buscar dentro de los procedimientos analíticos simplificados, métodos que modifiquen los ángulos y distancia más de acuerdo con sus respectivos errores probables, que los procedimientos empíricos; y que no sean tan complicados como el método riguroso.

El procedimiento que se expone a continuación, queda dentro de la categoría de los métodos simplificados y ha sido concebido por el suscrito en forma que se pueda resolver gráficamente.

## UN METODO SIMPLIFICADO

Como hemos visto, los métodos analíticos simplificados abordan separadamente, primero **la condición de los ángulos** y en seguida **la condición de los lados.** Seguiremos, pues, este orden.

**CONDICION DE LOS ANGULOS.** — Habíamos visto que debe verificarse:

$$\Sigma\, \alpha = (n-2)\ 200^g$$

pero debido a los errores de observación se tiene:

$$\triangle\, \alpha = (n-2)\ 200^g + d$$

Debemos corregir cada ángulo $\alpha$ (con sub-índice), en una magnitud $\alpha'$ (con sub-índice). La aplicación de la Teoría de los Errores, nos muestra que estas correcciones valen:

$$\alpha'_1 = \alpha'_2 = \ldots. = \alpha'_n = \frac{d}{n} \qquad (1)$$

Se deduce que los azimutes habrá que modificarlos de manera que para un lado de orden k se tenga:

$$\theta'_k = \theta_k - K\frac{d}{n} \qquad (2)$$

en que $\theta'$ es el azimut corregido y $\theta$ el azimut observado.

**CONDICION DE LAS DISTANCIAS.** — Se debe verificar:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\, l \ \text{sen}\ \theta' = O \\ \Sigma\, l\ \cos\ \theta' = O \end{array}\right\} \qquad (3)$$

pero debido a los errores lineales en la medida de los lados se tiene:

$$\Sigma\, l\ \text{sen.}\ \theta' = e\,x$$

$$\Sigma\, l\ \text{cos.}\ \theta' = e\,y$$

en que

$$e^2{}_x + e^2{}_y = e^2$$

Con el objeto de simplificar los cálculos que siguen, vamos a considerar otro sistema de coordenadas tal, que el eje de las X tenga la dirección del error de cierre. Sean $\varphi$ los azimutes referidos al nuevo sistema. Se tendrá:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma \mathrm{l} \text{ sen. } \varphi = \mathrm{e} \\ \Sigma \mathrm{l} \cos. \varphi = \mathrm{o} \end{array}\right\} \quad (4)$$

Para hacer cerrar la poligonal es necesario aplicarles a los diversos lados, correcciones $\triangle l_1$, $\triangle l_2 \ldots\ldots \triangle l_n$ respectivamente, de modo que se tenga:

$$\Sigma (l + \triangle l) \text{ sen. } \varphi = o$$
$$\Sigma (l + \triangle l) \cos. \varphi = o$$

Por otro lado aceptemos que el error probable en la medida de cada lado sea proporcional a su longitud. Tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle l_1 = \epsilon_1 l_1 \\ \triangle l_2 = \epsilon_2 l_2 \\ \triangle l_n = \epsilon_n l_n \end{array}\right\} \quad (5)$$

Los valores de $\epsilon$ serán funciones independientes de L, en que pueden intervenir otras variables, como ser la orientación.

Las ecuaciones anteriores se transforman en:

$$\Sigma (l + \epsilon l) \text{ sen. } \varphi = o$$
$$\Sigma (l + \epsilon l) \cos. \varphi = o$$

Las ecuaciones correlativas entre las correcciones y los errores son:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma \epsilon l \text{ sen. } \varphi + e = o \\ \Sigma \epsilon l \cos. \varphi \quad\quad = o \end{array}\right\} \quad (6)$$

Por otro lado, existe la condición que los valores de $\epsilon$ sean independientes de los valores de L. Esto quiere decir que suponiendo variable la longitud de los lados, la expresión $\frac{d\epsilon}{dl}$ debe ser nula. Supongamos que a todos los lados se les haya dado un mismo incremento dl se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma \epsilon \text{ sen. } \varphi + \Sigma l \text{ sen. } \varphi \dfrac{d\epsilon}{dl} + \Sigma \dfrac{de}{dl} = o \\ \Sigma \epsilon \cos. \varphi + \Sigma l \cos. \varphi \dfrac{d\epsilon}{dl} \quad\quad = o \end{array}\right\}$$

Siendo $\frac{d\epsilon}{dl} = o$, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\,\epsilon\ \text{sen.}\ \varphi + \Sigma\,\frac{de}{dl} = o \\ \Sigma\,\epsilon\ \cos.\ \varphi \qquad\qquad = o \end{array}\right\} \qquad (7)$$

La expresión $\Sigma\,\frac{d'e}{dl}$ es una constante en cada caso.

Por otra parte la Teoría de los Errores nos proporciona la siguiente ecuación:

$$\Sigma\,p\,v^2 = \text{min.}$$

Siendo p, el peso de las observaciones y v los residuos, o sea las diferencias entre los valores medidos y los corregidos, las cuales hemos llamado $\triangle l$.

Como hemos aceptado que los errores probables en la medida de los lados sean proporcionales a sus longitudes, y los pesos de las observaciones son inversamente proporcionales a los cuadrados de los errores probables, resulta:

$$p = \frac{k}{l^2}$$

El término $p\,v^2$ vale entonces:

$$p\,v^2 = \frac{k \triangle l^2}{l^2} = k\,\epsilon^2$$

Luego

$$\Sigma\,p\,v^2 = k\,\Sigma\,\epsilon^2$$

Por consiguiente, la ecuación que nos proporciona la Teoría de los Errores, es:

$$\Sigma\,\epsilon^2 = \text{min.} \qquad (8)$$

Tenemos, además, que cumplir con las ecuaciones de condición (7), entre las correcciones.

El cálculo indica que para encontrar la solución de este problema de mínimos relativos hay que igualar a cero las derivadas parciales con respecto a cada uno de los valores de $\epsilon$, de la expresión siguiente:

$$\Sigma\,\epsilon^2 + 2k_1\,(\Sigma\,\epsilon\ \text{sen.}\ \varphi + \Sigma\,\frac{de}{dl} + 2k_2\,\Sigma\,\epsilon\ \cos.\ \varphi)$$

Se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} \epsilon_1 + k_1\ \text{sen.}\ \varphi_1 + k_2\ \cos.\ \varphi_1 = o \\ \epsilon_2 + k_1\ \text{sen.}\ \varphi_2 + k_2\ \cos.\ \varphi_2 = o \\ \epsilon_n + k_1\ \text{sen.}\ \varphi_n + k_2\ \cos.\ \varphi_n = o \end{array}\right| \qquad (9)$$

Introduciendo en (6) los valores que aquí resultan para $\epsilon_1 l_1$, $\epsilon_2 l_2$, etc..., se obtiene:

$$k_1 (l_1 \text{ sen.}^2 \varphi_1 + l_2 \text{ sen.}^2 \varphi_2 + ...) + k_2 (l_1 \text{ sen. } \varphi_1 \text{ cos. } \varphi_1 + l_2 \text{ sen. } \varphi_2 \text{ cos. } \varphi_2 + ...) = e$$

$$k_1 (l_1 \text{ sen. } \varphi_1 \text{ cos. } \varphi_1 + l_2 \text{ sen. } \varphi_2 \text{ cos. } \varphi_2 + ...) + k_2 (l_1 \text{ cos.}^2 \varphi_1 + l_2 \text{ cos.}^2 \varphi_2 + ...) = o$$

O bien:

$$\left. \begin{array}{l} k_1 \Sigma (l \text{ sen.}^2 \varphi) + k_2 \Sigma (l \text{ sen. } \varphi \cos \varphi) = o \\ k_1 \Sigma (l \text{ sen. } \varphi \text{ cos. } \varphi) + k_2 \Sigma (l \text{ cos.}^2 \varphi) = o \end{array} \right| \quad (10)$$

Las expresiones $\Sigma (l \text{ sen.}^2 \varphi)$ y $\Sigma (l \cos.^2 \varphi)$, son siempre positivas, puesto que cada uno de sus términos es positivo. En cambio en las expresiones $\Sigma (l \text{ sen. } \varphi \cos \varphi)$, cada término puede ser indistintamente o positivo o negativo, dependiendo ésto solamente del cuadrante a que corresponde la dirección del lado.

Se comprende entonces, que en una poligonal en que los lados tienen direcciones variadas, como es lo corriente en las poligonales taquimétricas cerradas, el valor de la suma algebraica $\Sigma (l \text{ sen. } \varphi \text{ cos. } \varphi)$ sea pequeño al lado de $\Sigma (l \text{ sen.}^2 \varphi)$ y $\Sigma (l \text{ cos.}^2 \varphi)$.

Si en vista de esto despreciamos los términos en que figura $\Sigma (l \text{ sen. } \varphi \text{ cos. } \varphi)$, tendremos:

$$k_1 \Sigma (l \text{ sen.}^2 \varphi) = e$$

$$k_2 \Sigma (l \text{ cos.}^2 \varphi) = o$$

$$k_1 = \frac{e}{\Sigma (l \text{ sen.}^2 \varphi)}; \quad k_2 = o$$

Introduciendo estos valores en 9), tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_1 l_1 = \triangle l_1 = \dfrac{e}{\Sigma (l \text{ sen.}^2 \varphi)} \cdot l_1 \text{ sen. } \varphi_1 \\ \triangle l_2 = \dfrac{e}{\Sigma (l \text{ sen.}^2 \varphi)} \cdot l_2 \text{ sen. } \varphi_2 \\ \triangle l_n = \dfrac{e}{\Sigma (l \text{ sen.}^2 \varphi)}, l_n \text{ sen. } \varphi_n \end{array} \right| \quad (11)$$

Estas son las fórmulas que fijan las correcciones de los lados, en forma de obtener el cierre desplazando los lados paralelamente asimismos.

**DISCUSION DEL RESULTADO.** — Un lado de orden k, tiene por corrección a la expresión:

$$\triangle l_k = \frac{e}{\Sigma (l \text{ sen.}^2 \varphi)} \cdot l_k \text{ sen. } \varphi_k$$

Los términos e y $\Sigma$ (l sen.$^2\,\varphi$) son valores finitos y bien determinados en cada caso, luego:

$$\triangle l_k = e\, l_k \text{ sen. } \varphi_k$$

Se observa que $\triangle l_k$ es proporcional a ($l_k$ sen. $\varphi_k$), o sea a la proyección del lado $l_k$ sobre la dirección del error de cierre

$$\text{Si } \varphi_k = 0 \text{ , } \triangle l_k = 0$$

$$\varphi_k = 100^g \text{ , } \triangle l_k = e\, l_k = \text{max.}$$

Como se ve, resulta corregido en mayor escala un lado, cuya dirección se acerque más a la del error de cierre.

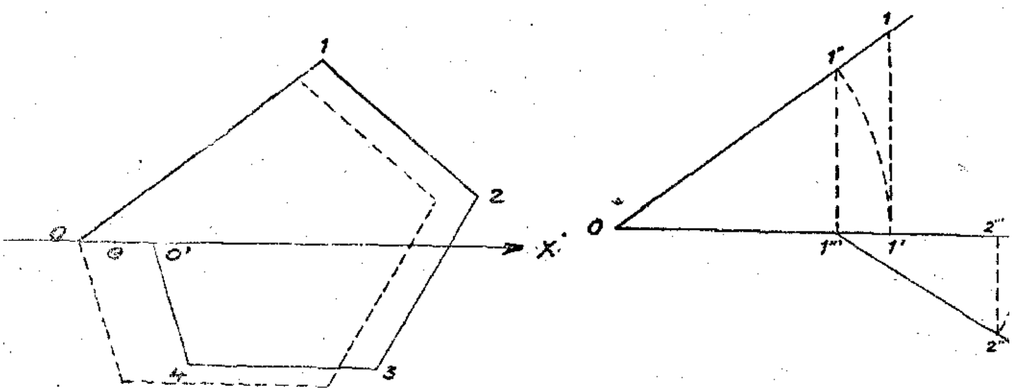
La conclusión es lógica, porque es más útil a la compensación atribuirle mayor culpa en el error resultante a un lado aproximadamente paralelo al error de cierre, que a uno aproximadamente normal a éste.

Las fórmulas (11) tienen la ventaja, sobre otras formas más exactas de resolver el problema, de que es posible su resolución gráfica.

Esto se estudia a continuación.

## RESOLUCION GEOMETRICA DEL PROBLEMA

**a) CONSTRUCCION DEL TERMINO** $\Sigma$ (l sen.$^2\,\varphi$).—Consideremos un




(Fig. 5).

sistema de coordenadas ortogonales de modo que O X sea paralelo a la dirección del error de cierre. (Fig. 5).

Desde un punto de este eje, digamos el origen, tracemos una paralela a $l_1$. La proyección sobre OX,01' vale $l_1$ sen. $\varphi_1$. Si hacemos un arco de círculo con este valor como radio haciendo centro en O, hasta cortar $l_1$ obtenemos 1'' que proyectado sobre OX nos da 1''', tal que $Ol''' = l_1$ sen$^2\,\varphi$.

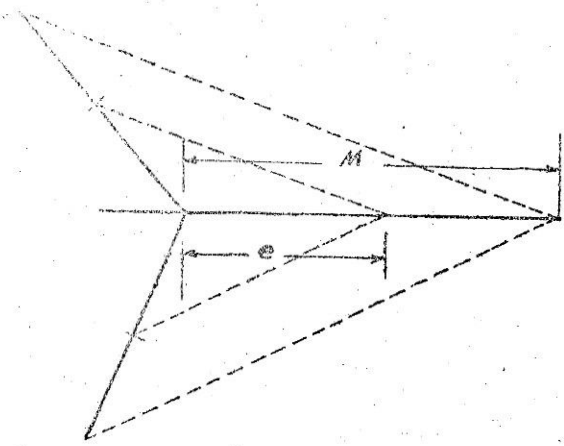
Si a continuación de este punto 1''', hacemos la misma construcción para el lado siguiente y así en adelante hasta completar los lados, obtenemos el valor $\Sigma$ (l sen.$^2\,\varphi$). Como todos los términos son positivos, se prescinde del sentido.

**b) CONSTRUCCION DE LOS VALORES DE** $\triangle 1$ **.—** Llamemos M la magnitud $\Sigma$ (l sen.$^2$ $\varphi$) y escribamos la fórmula de corrección para un lado cualesquiera:

$$\triangle l_k = \frac{e}{M} l_k \text{ sen. } \varphi_k$$

El término $\triangle l_k$ es, pues, cuarta proporcional geométrica entre e, M y $l_k$ sen $\varphi_k$.

La determinación de cada valor de $\triangle 1$, se puede hacer entonces por medio de una construcción como la de la figura 6.

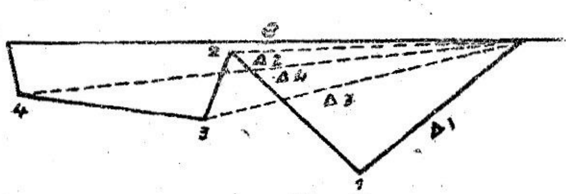



(Fig. 6).

Para facilitar las operaciones conviene aplicar la magnitud l sen $\varphi$ sobre una paralela al lado correspondiente y en sentido contrario al error de cierre.

El valor de l sen $\varphi$ se obtiene de la primera construcción hecha. Haciendo para cada lado la determinación de la cuarta proporcional geométrica mencionada, se obtiene una serie de vectores $\triangle$ 1 que indican el desplazamiento relativo de un vértice cualquiera, con respecto al vértice anterior.

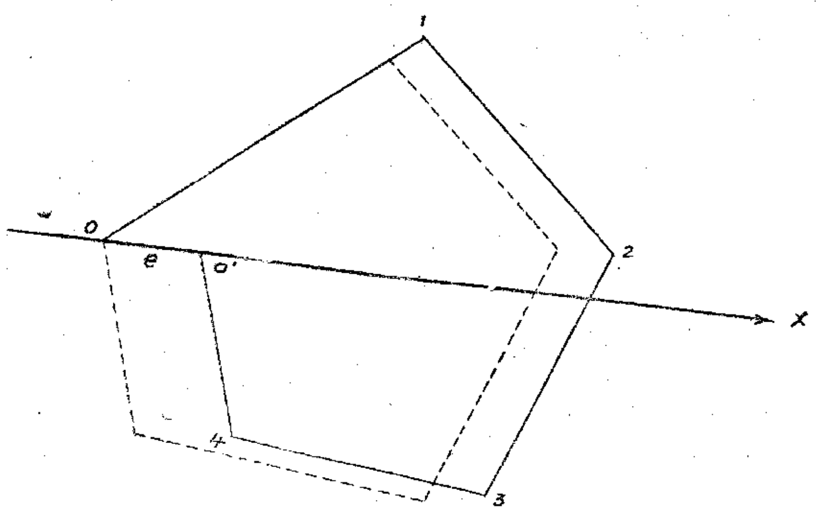
**c) DESPLAZAMIENTOS RESULTANTES.—** Si construímos un polígono con estos sectores, como el de la figura, tendremos en los sectores resultantes sucesivos 01, 02, 03, etc..., la magnitud, dirección y sentido de los desplazamientos absolutos de los vértices correspondientes. Fig. 7.

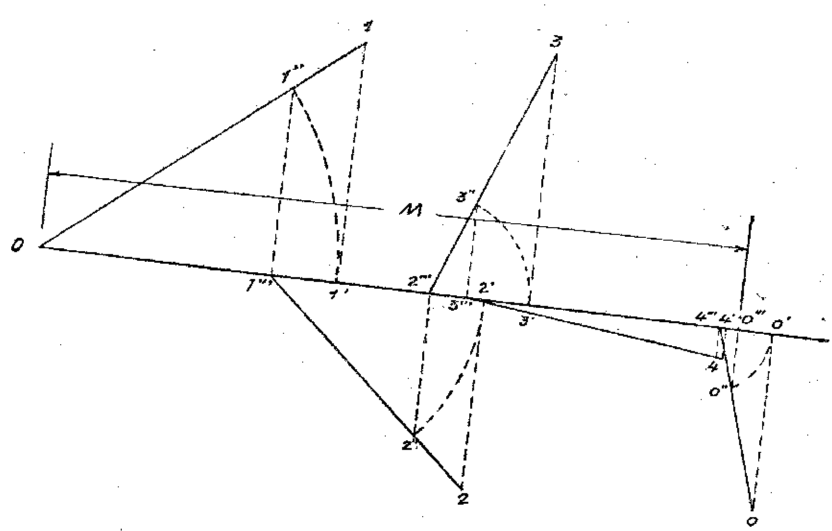


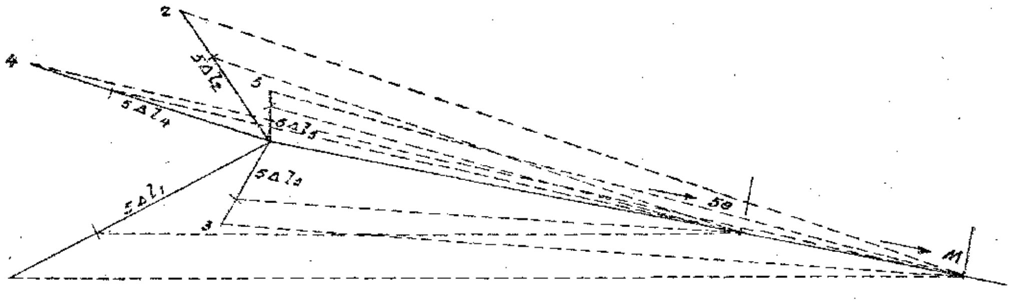

(Fig. 7).

Para la aplicación práctica del método es ventajoso hacer esta construcción en un papel transparente.

A continuación se incluye un gráfico que comprende todas las operaciones en una aplicación a una poligonal de cinco lados. (Fig. 7 y 8).




*Nota. Se ha ampliado 5 veces el valor de e para mayor precision.*