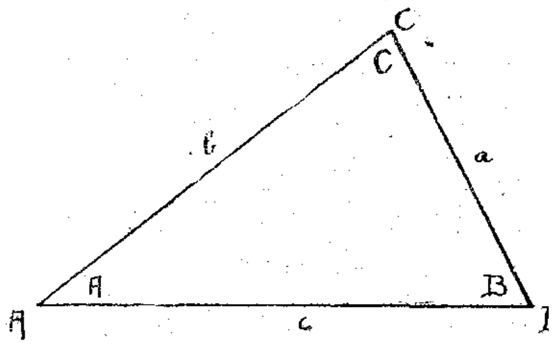
Ing. Arturo Quintana
Prof. de Topografía de la Escuela de Ingeniería

Trabajos originales sobre temas relacionados con la topografía

PESO DE LAS MEDIDAS DE ÁNGULOS EN UN TRIÁNGULO

Nos proponemos en este ensayo, averiguar el número de observaciones igualmente precisas que deben hacerse en los ángulos de un triángulo, para que los errores relativos en el cálculo de los lados, debido a los errores angulares sean guales.



Sea un triángulo ABC del cual se ha medido directamente un lado, digamos AB y nos proponemos medir además independientemente cada uno de sus ángulos, con un número tal de observaciones que verifique nuestra proposición inicial.

Los valores medidos deben cumplir con la única condición geométrica siguiente:

$$A + B + C = 200^g \qquad (1)$$

Supongamos que hemos medido los ángulos con un número diferente de obciones igualmente precisas y sean estos n_A, n_B y n_C respectivamenre.

Debido a los errores de observación no se verificará la condición (1) sino que veremos:

$$A + B + C = 200^g + e \qquad (2)$$

Para llegar al cumplimiento de la condición debemos corregir los ángulos en valores α, β, γ respectivamente, de tal manera que se tenga:

$$\alpha + \beta + \gamma + e = o \tag{3}$$

Por otro lado, la teoría de errores indica que debe verificarse la siguiente relación para que las correcciones sean las más probables:

$$P_A \alpha^2 + P_B \beta^2 + P_C \gamma^2 = \text{mín.}$$

Pero sabemos que los pesos de las medidas cuando se trata de observaciones igualmente precisas, son proporcionales al número de éstas, por consiguiente, podemos escribir:

$$n_A \alpha^2 + n_B \beta^2 + n_C \gamma^2 = \text{min.} \tag{4}$$

La ecuación (4) equivale a un problema de mínimun entre magnitudes que deben verificar la condición rigurosa (3).

El análisis infinitesimal indica que este problema se resuelve, derivando con respecto a cada una de las variables, e igualando a cero las derivadas de la expresión siguiente:

$$n_A \alpha^2 + n_B \beta^2 + n_C \gamma^2 + 2K\,(\alpha + \beta + \gamma)$$

Obtenemos:

$$n_A \alpha + K = o$$
$$n_B \beta + K = o$$
$$n_C \gamma + K = o$$

De aquí deducimos:

$$n_A \alpha = n_B \beta = n_C \gamma \tag{5}$$

Los valores de α, β, γ, así determinados son los valores de las correcciones más probables aplicables a cada ángulo y, por lo tanto, dan la medida del error problable.

Veamos ahora qué error relativo se obtiene en el cálculo de los lados desconocidos a causa de dichos errores.

Tenemos:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} \\ b &= \frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Log} a &= \operatorname{Log} c + \operatorname{Log} \operatorname{sen} A - \operatorname{Log} \operatorname{sen} C \\ \operatorname{Log} b &= \operatorname{Log} c + \operatorname{Log} \operatorname{sen} B - \operatorname{Log} \operatorname{sen} C \end{aligned}\right\}$$

Diferenciando obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,a}{a} &= \frac{d\,c}{c} + d\ (\text{Log sen } A) - d\ (\text{Log sen } C) \\ \frac{d\,b}{b} &= \frac{d\,c}{c} + d\ (\text{Log sen } B) - d\ (\text{Log sen } C) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

En este caso las diferenciales de los ángulos son α, β y γ. Sean además δ_A, δ_B y δ_C los valores de las diferencias tabularias de los logaritmos de los senos de los ángulos A, B, C, para la unidad diferencial de la tabla logarítmica y supongamos expresados α, β, γ, en esta misma unidad. Tendremos:

$$\begin{aligned} d\ (\text{Log sen } A) &= \alpha\,\delta_A \\ d\ (\text{Log sen } B) &= \beta\,\delta_B \\ d\ (\text{Log sen } C) &= \gamma\,\delta_C \end{aligned}$$

Substituyendo estos valores en (7), obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,a}{a} &= \frac{d\,c}{c} + \alpha\,\delta_A - \gamma\,\delta_C \\ \frac{d\,b}{b} &= \frac{d\,c}{c} + \beta\,\delta_B - \gamma\,\delta_C \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Nuestro objetivo es obtener iguales errores relativos en el cálculo de los lados desconocidos, o sea:

$$\frac{d\,a}{a} = \frac{d\,b}{b}$$

Para que esto se verifique es necesario:

$$\alpha\,\delta_A = \beta\,\delta_B \qquad (9)$$

Comparando con (5) deducimos:

$$\frac{n_A}{\delta_A} = \frac{n_B}{\delta_B}$$

Si no sabemos a priori cual será el lado conocido del triángulo por ignorarse el sentido de marcha del cálculo dentro de la triangulación, debemos extender esta condición al ángulo C y se tendrá:

$$\frac{n_A}{\delta_A} = \frac{n_B}{\delta_B} = \frac{n_C}{\delta_C} = N \qquad (10)$$

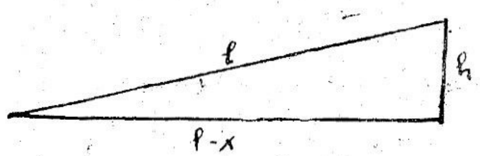
Esto quiere decir que para obtener igual error relativo en el valor calculado de los lados, debido a los errores angulares en la medida, debe procurarse que el número de observaciones de cada ángulo sea proporcional a su diferencia tabularia en la tabla del logaritmo del seno.

Cabe observar que d (Log sen x) $=$ $cotg\, x\, dx$ por consiguiente, las diferencias tabularias resultan proporcionales a $cotg x$.

De aquí se deduce que podemos expresar también el resultado de este estudio, diciendo que el número de observaciones de cada ángulo debe ser proporcional a su contagente.

PRECISIÓN REQUERIDA EN LA NIVELACIÓN DE UNA BASE

El objeto de la nivelación de la base es el de poder hacer la reducción al horizonte de las longitudes medidas en pendiente.



Sea l la distancia medida y h el desnivel entre sus dos extremos.

Sea además $l_h = (l - x)$ la longitud reducida al horizonte. Se tiene:

$$(l - x)^2 + h^2 = l^2$$

Despreciando el término x^2 se tiene:

$$x = \frac{h^2}{2l} \qquad (1)$$

Deseamos que por efecto de un error en el valor de h, el error en x no pase de cierto valor $d\,x_o$, fijado previamente en cada caso, de acuerdo con la precisión general de la medición.

Diferenciando la fórmula (1) tenemos:

$$dx = \frac{h\,dh}{l}$$

haciendo $d\,x < d\,x_o$ se tiene:

$$dh < \frac{d\,x_o}{\left(\frac{h}{l}\right)} \qquad (2)$$

El término $\frac{h}{l}$ es para inclinaciones no muy fuertes, la pendiente de la medida.

La fórmula (2) nos dice:

a) El error admisible en el valor de h es proporcional al error admisible en la reducción al horizonte $d\,x_0$.

b) El error admisible en el valor de h es inversamente proporcional a la pendiente de la longitud medida.

De lo anterior se deduce que para pendientes pequeñas no se requiere tanta precisión como para pendientes mayores.

Para fijar las ideas, damos a continuación una tabla que da los valores del error admisible de h para valores de $(d\,x_0)$ y $\left(\frac{h}{l}\right)$

Pendiente $\frac{h}{l}$	Error $d\,x_0$ admisible en mms.					
	0.01	0.02	0.05	0.10	0.20	0.50
0.01	1.00	2.00	5.00	10.00	20.00	50.00
0.02	0.50	1.00	2.5	5.0	10.0	25.0
0.03	0.30	0.60	1.7	3.3	6.6	16.7
0.04	0.25	0.50	1.25	2.5	5.0	12.5
0.05	0.20	0.40	1.0	2.0	4.0	10.0
0.06	0.17	0.30	0.8	1.6	3.3	8.3
0.08	0.12	0.25	0.6	1.2	2.5	6.2
0.10	0.10	0.20	0.5	1.0	2.0	5.0
0.12	0.08	0.16	0.4	0.8	1.6	4.0
0.15	0.07	0.13	0.3	0.7	1.3	3.3
0.20	0.05	0.10	0.25	0.5	1.0	2.5
0.25	0.04	0.08	0.2	0.4	0.8	2.0

PROBLEMAS DE UN TRAZADO

UBICACIÓN ECONÓMICA DE OBRAS DE ARTE DE EJE RECTO

En el estudio del trazado de obras hidráulicas, u otras, es corriente tener que comparar la solución de desarrollarse en una depresión o quebrada siguiendo una línea de pendiente, con la solución de salvar el obstáculo por medio de una obra de eje recto (puente, canoa, sifón, etc.)

La resolución de este problema, cuando razones de seguridad no aconsejen el empleo de una de las alternativas, debe mirarse desde el aspecto económico y buscar el costo mínimo.

Cuando se está en presencia de un problema de esta naturaleza, debe hacerse un reconocimiento previo, si es necesario con una poligonal taquimétrica sencilla (casi sin puntos de relleno), que permita establecer cuáles son las soluciones posibles y comparables.

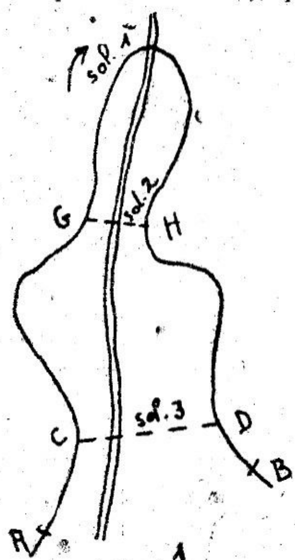


Fig. 1

Sea (fig 1) AB una curva de nivel o de pendiente a la cual sigue aproximadamente el trazado de un canal o acueducto.

En este caso el reconocimiento completado con la poligonal taquimétrica, nos indicará la posibilidad de tres soluciones comparables.

Sea K el costo por *m. l.* horizontal de obra a través de la depresión, y k el costo por *m. l.* de desarrollo y A el costo de las obras de arte varias en una determinada solución.

Sea además, L la longitud horizontal de la obra a través de la depresión, y l la longitud de desarrollo contenida en una de terminada solución y contada a partir de dos puntos arbitrarios A y B.

De todas las soluciones posibles se deberá elegir aquélla para la cual resulte menor la expresión.

$$C = k\, l + K.\, L. + A. \qquad (1$$

Es evidente que los valores de l y L se determinan, fijando arbitrariamente en un principio, los puntos de empalme entre las secciones de desarrollo y de obra recta. Por esto, una vez determinada por la relación (1) la solución a emplear, debemos buscar con mayor exactitud la posición de los puntos de empalme, para que el costo de la solución sea mínimo. Así, por ejemplo, si se determina como solución general más económica la variante 3, siendo los puntos C y D en un principio arbitrarios, es evidente que previo un estudio más detenido, podemos encontrar una posición más ventajosa de dichos puntos. De esto nos ocupamos a continuación.

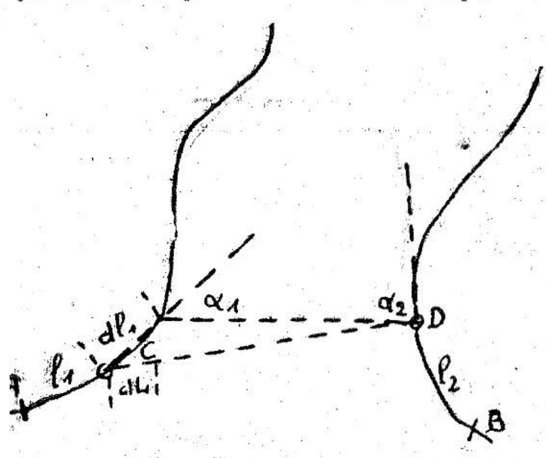


Fig. 2

La expresión del costo del trazado entre A y B es:

$$C = l_1 k + L\,K + l_2 k + A$$

Esta expresión debe ser mínima con una posición más conveniente de C y D. Las variables independientes son, pues, l_1 y l_2. Aceptamos que las obras de arte varias no cambian con los pequeños desplazamientos que experimenten C y D, por lo tanto el costo A es constante.

Debe verificarse.

$$\frac{d\,C}{d\,l_1} = o$$

$$\frac{d\,C}{d\,l_2} = o$$

Tenemos entonces:

$$\frac{d\,C}{d\,l_1} = k + \frac{d\,L}{d\,l_1} K = o \qquad (2$$

$$\frac{d\,C}{d\,l_2} = k + \frac{d\,L}{d\,l_2} K = o$$

Pero

$$\frac{d\,L}{d\,l_2} = -\cos\alpha_1 \;:\; \frac{d\,L}{d\,l_2} = -\cos\alpha_2$$

De donde resulta

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \cos\alpha = \frac{k}{K} \qquad (3$$

Se ve que la posición de C y D debe ser tal que los ángulos α formados por las tangentes a las curvas de nivel y la dirección de la obra recta, tengan por coseno a la razón entre los costos por m. l. del desarrollo y de la obra de arte.

Supongamos que un acueducto valga \$ 200 m. l. y un sifón \$ 600 m. l. Se tiene $\cos\alpha = \dfrac{200}{600} = 0.33$; $\alpha = 70°$.

Este estudio tiene no solamente un interés teórico, sino que su aplicación suele ser muy útil en la práctica. En efecto, si la obra recta tiene una gran longitud (algunos kilómetros), la fijación más exacta de los puntos de empalme, nos permitirá reducir el ancho de la faja por levantar a lo largo de la obra recta. Así, por ejemplo, en el caso de no hacer este estudio, el ancho de faja necesario puede pasar de 300 mts., en cambio en esta forma, puede bastar un ancho inferior a 50 mts. lo que significa un buen número de hectáreas economizadas en el levantamiento.

La manera de hacer esta determinación en el terreno puede ser la siguiente: En los puntos C y D se clavan jalones.

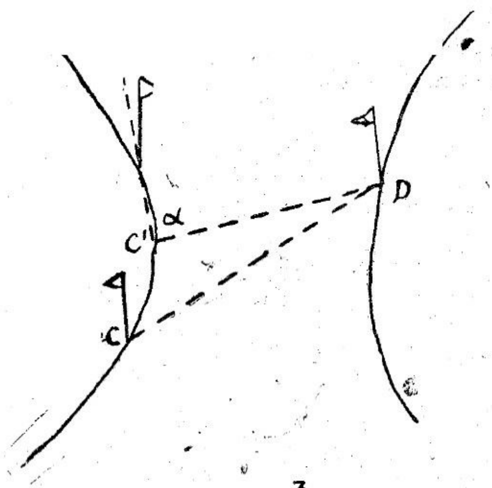


Fig. 3

Para rectificar la posición C, nos trasladamos a este punto y nos desplazamos sobre la curva de nivel, provisto de una brújula de bolsillo u otro instrumento similar, y en diversas posiciones medimos el ángulo formado por la visual al jalón D y la visual a otro jalón colocado sobre la curva en que nos desplazamos a una distancia entre 5 y 10 mts. Esta medición se hace hasta llegar a un punto C' en que el valor del ángulo sea el previamente calculado por la expresión (3).

Una vez encontrada la posición de C' hacemos igual cosa con D, hasta encontrar un punto D'. El cambio de posición de D influye muy poco en la dirección del eje si L es largo. De todos modos esta variación influye muy poco en la posición de C', siendo por lo general suficiente una faja de un ancho entre 30 y 50 metros para ponernos a cubierto de contingencias.

* * *

La aplicación de este estudio es útil además para el dibujo del eje al trazar el proyecto una vez confeccionado el plano del levantamiento. En este caso se amplía su campo de acción a los casos de cortes y túneles, los que no es posible hacer en el terreno debido a la no intervisibilidad de los puntos de empalme.