

ANALES

DEL INSTITUTO DE INGENIEROS DE CHILE

SAN MARTIN 352

— CASILLA 487 —

SANTIAGO

Sucesor

De la:

Y del:

«SOCIEDAD DE INGENIERIA» «INSTITUTO DE INGENIEROS»
Fundada el 31 de mayo de 1888 Fundado el 28 de octubre de 1888

Con Personalidad Jurídica desde el 28 de diciembre de 1900

Adherido a la USAI y a la CONFERENCIA MUNDIAL DE LA ENERGIA

AÑO LXVI • JULIO - AGOSTO DE 1953 • N.ºs 7 - 8

Comisión Editora: Raúl Sáez S. (Pde.), Sergio Silva, Alberto Covarrubias, Rodrigo Flores y Marcelo Honorato.

Deslizamiento de uniones clavadas y su influencia en estructuras de madera

TRABAJO PRESENTADO A LAS CUARTAS JORNADAS DE INGENIERIA
ESTRUCTURAL

Por los ingenieros argentinos ALBERTO HAASE y RAMON LOPEZ ZIGARAN. —
Instituto General de Construcciones

Resumen:

Se determina en este trabajo los "módulos de deslizamiento" de uniones de maderas nacionales, usando probetas clavadas de tracción. Los ensayos se ejecutaron en el Laboratorio de Ensayo de Materiales en esta Universidad.

Los módulos se introducen en el cálculo de la deformación de vigas trianguladas y se muestra su influencia en el pandeo de una barra compuesta.

A. Introducción.

Las deformaciones en construcciones de madera no dependen solamente de la elasticidad de las barras de madera, sino también de los deslizamientos de sus uniones. La influencia del deslizamiento de las uniones sobre la deformación de la estructura es, en general, de mayor importancia que el comportamiento elástico de la misma, especialmente para uniones mediante tornillos, clavos, conectores y pasadores, mientras que se puede decir que una construcción encolada se comporta elásticamente para las cargas usuales del reglamento alemán (DIN 1052) dentro de los límites admisibles de las tensiones.

B. Ensayos.

Con el fin de hallar una relación entre la carga y la deformación, hemos ejecutado algunos ensayos, limitándonos a uniones clavadas para determinar su comportamiento. En los ensayos se usaron dos medidas de clavos: 42/100 y 30/65 (siendo el número sobre la barra el diámetro del clavo en décimos de milímetros y el que se halla debajo de la barra el largo en milímetros).

Las medidas correspondientes a las uniones y la disposición de los clavos se enseñan en figuras 1 y 2. Las probetas empleadas son distintas de las comúnmente usadas, fig. 3.

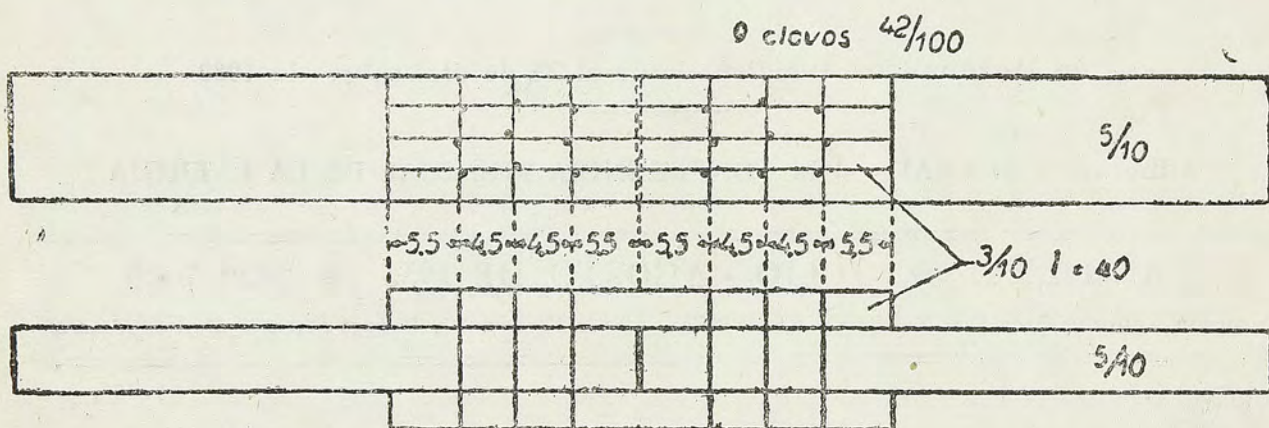


Fig. 1. Unión de madera Pino Brasil, cada extremo 9 clavos 42/100, corte doble.

Disposición de los clavos en la tapa;
superior — inferior

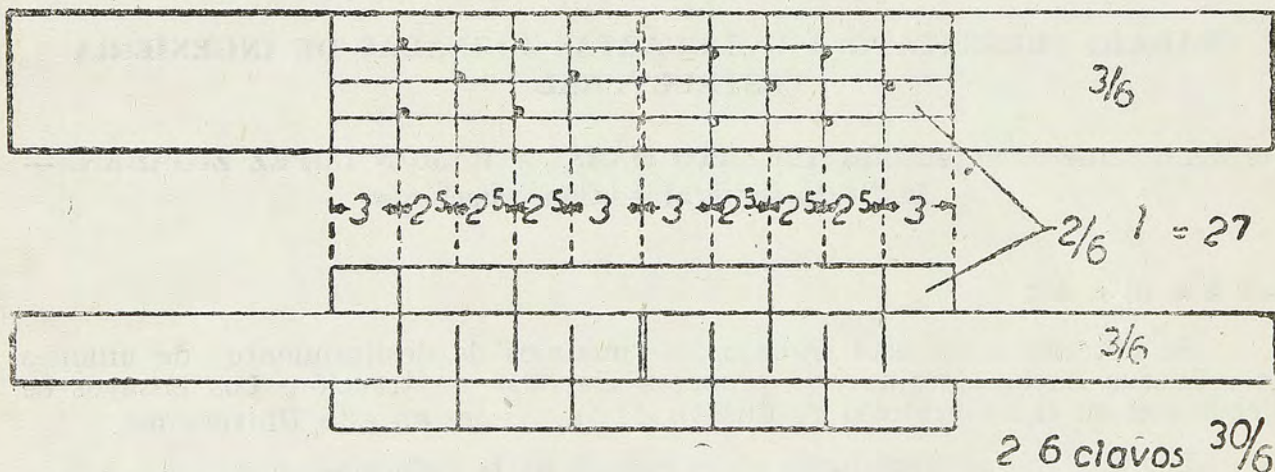


Fig. 2. Unión de madera Pino Brasil y Nogal, cada extremo 2 x 6 clavos 30/60, corte simple.

En las últimas, las maderas laterales se apoyan sobre la cabeza de la prensa que impide el movimiento lateral; así existe la posibilidad de que las maderas laterales se compriman contra la madera central, lo que influiría en los resultados de los ensayos.

Por esta causa hemos elegido las probetas de las figuras 1 y 2, donde las tapa-juntas pueden trabajar como en la estructura sin otra influencia fuera del rozamiento.

Durante los ensayos se observó que las tapa-juntas se arqueaban, apartándose sus extremos de la madera central, a causa del momento flector. Este mo-

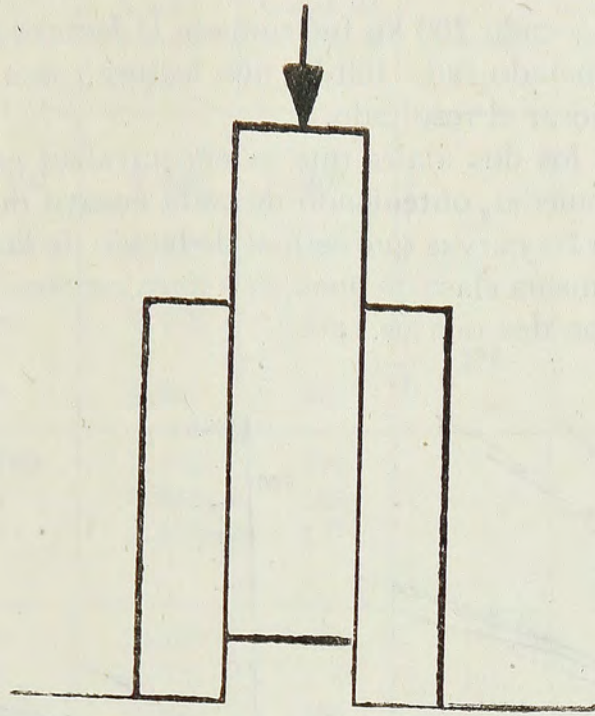


Fig. 3. Probeta común.

mento se produce siempre en maderas cuya unión es unilateral, como en estas tapa - juntas o en los arriostramientos de columnas compuestas.

La resistencia a tracción de los clavos es:

$$\begin{array}{l} \text{clavos } 42/100: \quad \sigma_r = 7,06 \text{ t/cm.}^2 = 15\% \\ \text{» } 30/60: \quad \sigma_r = 9,76 \text{ ,, } \quad \text{---} \end{array}$$

Las propiedades de las maderas son:

Figura	Grupo	Madera	Humedad	Resistencia comp. kg/cm ²
1	1	Pino Brasil	13,4	} 729 *
2	2	Pino Brasil	13,3	
3	3	Nogal	9,9	

* La resistencia corresponde a 10,9% de humedad. (Los ensayos fueron ejecutados más tarde.)

Hemos usado las maderas de las probetas, figura 1 grupo Ia. y Ib., tal como salían de la sierra mecánica; las maderas para las probetas, figura 2, grupos II y III, fueron cepilladas a mano. La primera unión se realizó sin preagujerear las maderas, no observándose rajaduras en las mismas; mientras que en las siguientes, las maderas se rajaron, y por esto se prepararon de antemano los agujeros. Para los clavos 42/100 se usó una mecha de Φ 3,5 mm. y para los clavos 30/65 una mecha de Φ 2,5 mm.

Los grupos de ensayo II y III, figura 2, estaban previstos para clavos 25/50, pero por falta de existencia en el comercio hemos tomado clavos 30/60. En cada extremo y en ambas caras de cada unión, hemos fijado los diales para medir los deslizamientos. Los diales permiten una lectura en centésimos de milímetros. Las uniones fueron traccionadas en una prensa Amsler 50 t. La carga fué apli-

cada paulatinamente, y cada 200 kg fué tomada la lectura de los diales. Para el último grupo hemos tomado cada 100 kg una lectura, para los primeros 600 kg. de carga, pero sin mejorar el resultado.

De la lectura de los dos diales que se encontraban en el mismo extremo, hemos formado el promedio, obteniendo de cada ensayo dos resultados.

En los diagramas las curvas que se han deducido de la misma unión, fueron representadas con la misma clase de línea, así: línea continua, de trazos, de trazos y puntos, de trazos con dos puntos.

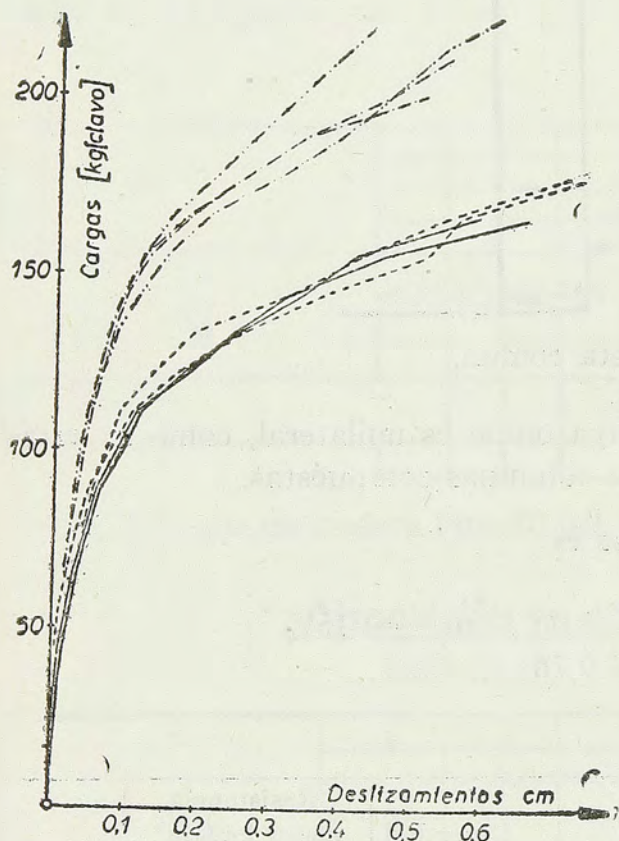


Fig. 4. Diagrama de carga - deformación.

Grpo: Ia y Ib.

Madera Pino Brasil.

Clavos: 42/100.

Los primeros tres diagramas representan la relación entre la carga y la deformación. La carga se refiere a un corte simple de un clavo; el primer grupo tenía en cada extremo nueve clavos a doble corte, y, por consiguiente, la carga fué dividida por 18; los otros grupos tenían en cada extremo doce clavos a simple corte y la carga se dividió por 12. Las cargas máximas que las uniones soportaban se indican en la tabla siguiente:

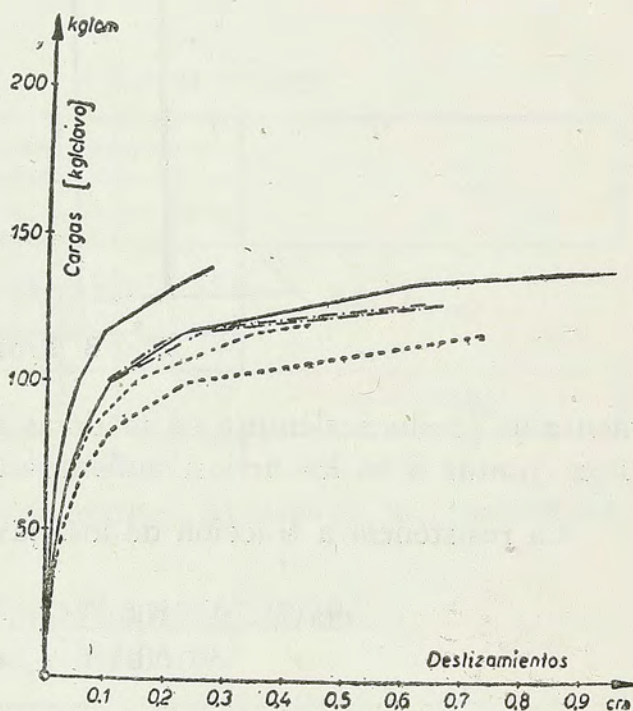


Fig. 5. Diagrama de carga - deformación.

Grupo: II.

Madera: Pino Brasil.

Clavos: 30/60.

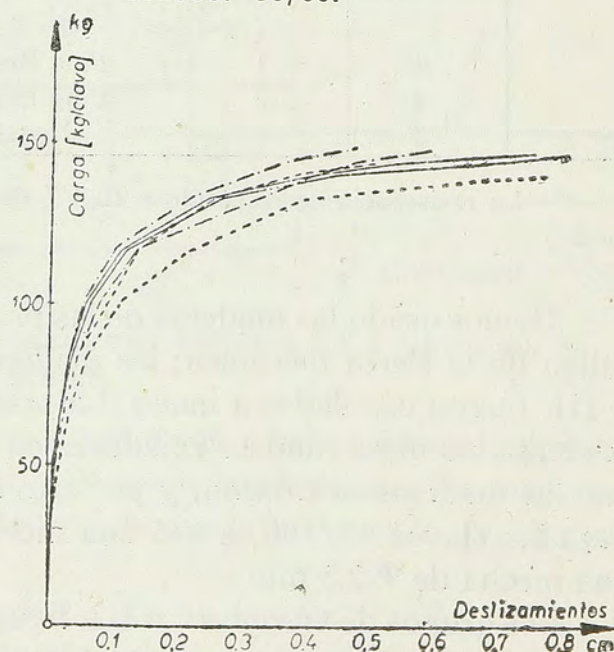


Fig. 6. Diagrama de carga - deformación.

Grupo: III.

Madera: Nogal.

Clavos: 30/60.

Grupo	Ensayo	Clavo	Carga rotura Kg.	Carga de un clavo Kg.	Promedio Kg.	Carga adm. DIN 1052 Kg.	Observaciones
Ia.	1	42/100	3.630	202	215	62,5	Agujeros pre-taladrados en un ext. griet.
	2		4.130	229			
Ib.	3	»	4.930	274	274	62,5	
	4	»	4.950	275			
II	1	30/60	2.152	179	33 (1)	33 (1)	Pequeña raj.
	2		1.950	163			
	3		1.525	127			Cubr. junta altura, grieta
III	1	»	2.327	194	201	33 (1)	
	2	»	2.670	223			
	3	»	2.260	188			

(1) Determinado mediante la fórmula de Preuss.

$$N = \frac{620}{1,4 + d} d^2 = \frac{620}{1,4 + 0,3} \cdot 0,3^2 = 33 \text{ Kg.}$$

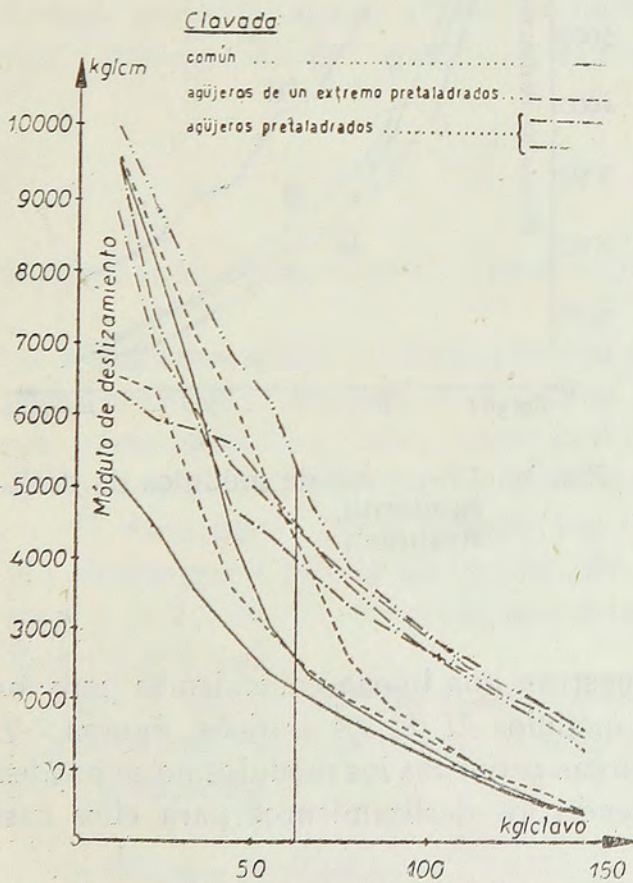


Fig. 7. Diagrama del módulo de deslizamiento.
Grupo: Ia y Ib.
Madera: Pino Brasil.
Clavos: 42/100.

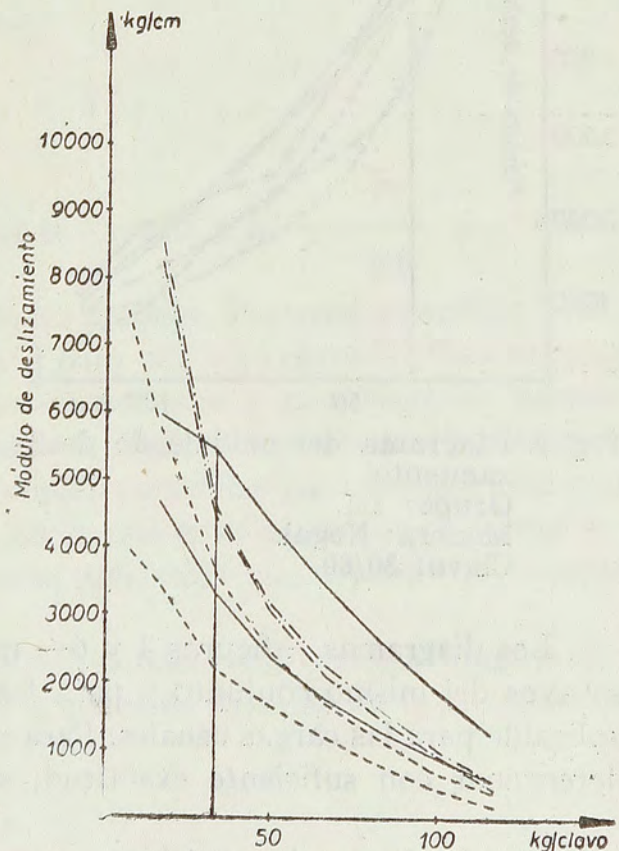


Fig. 8. Diagrama del módulo de deslizamiento.
Grupo: II.
Madera: Pino Brasil.
Clavo: 30/60.

Luego se ha calculado el cociente entre la carga por clavo y el deslizamiento y este cociente se designa «módulo de deslizamiento» M , su dimensión es Kg/cm. Los diagramas —figuras 7 y 9— enseñan el valor del módulo, respecto a la carga, por clavo. Sus valores para las cargas admisibles N , son:

Grupo	Clavo	Madera	Carga N	M
Ia.	42/100	Pino Brasil	62,5	2.470
Ib.	»	Pino Brasil	62,5	4.540 (1)
II	30/60		33	3.930
III	»	Nogal	33	4.690

(1) En el cálculo de M del grupo Ia. hemos tomado en consideración el valor del ensayo 2, grupo Ia, obtenido para el extremo preagujereado. En el gráfico, figura 7, este valor corresponde a la curva superior en trazos.

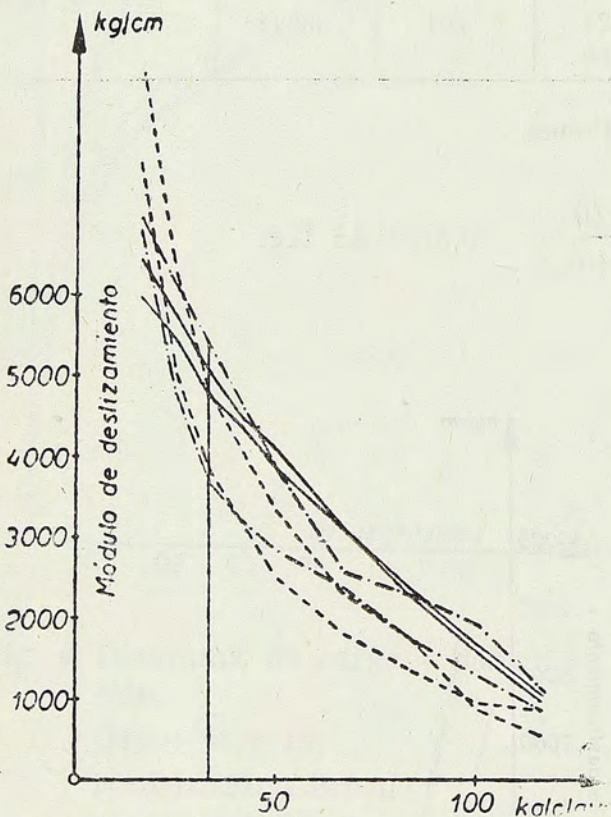


Fig. 9. Diagrama del módulo de deslizamiento.
Grupo: III.
Madera: Nogal.
Clavo: 30/60.

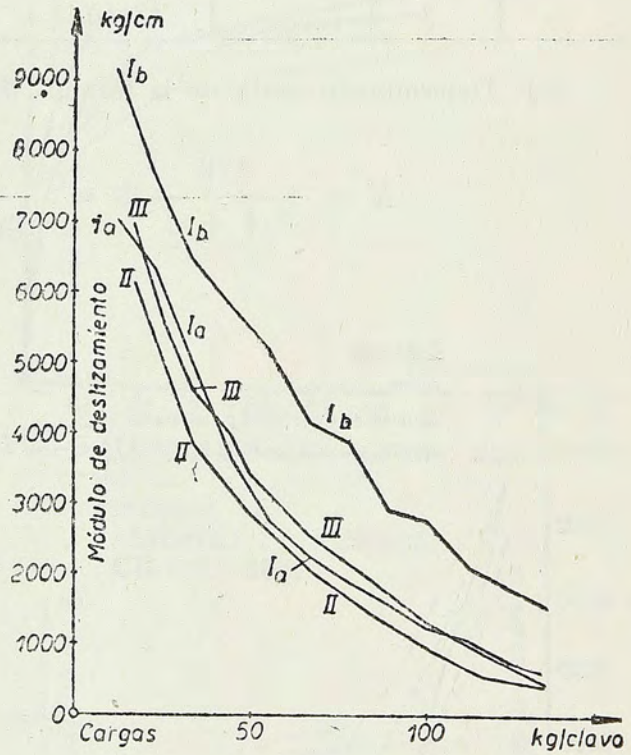


Fig. 10. Diagrama de módulos de deslizamiento.
Resumen.

Los diagramas —figuras 4 y 6— muestran una buena coincidencia para los ensayos del mismo conjunto y para los módulos M de los gráficos, figuras 7-9, aplicable para las cargas usuales. Para cargas pequeñas los módulos no se pueden determinar con suficiente exactitud, siendo los deslizamientos para ellos casi

1
nulos y sin diferencias notables en los diales disponibles con escalas— milí-
100
metros.

Además, es imposible lograr probetas absolutamente centradas, por lo que

el par de diales en un mismo extremo muestra deslizamientos distintos y se obtienen valores discrepantes. Aun haciendo las probetas con debido esmero, no se puede eliminar la influencia de la constitución organoléptica de la madera, pues ésta tiene mucha influencia en la repartición de la carga.

La fijación de la probeta en la máquina de ensayo se hizo mediante las mordazas que actúan en forma de cuñas en un cono cilíndrico. La diferencia de dureza en la masa de la madera provoca un deslizamiento distinto en las cuñas, originando, en consecuencia, excentricidad en las cargas.

La irregularidad orgánica dentro de una misma pieza queda demostrada por los deslizamientos desiguales al principio de los ensayos. Si se elige madera de calidad uniforme, por ejemplo, toda duramen, entonces los primeros deslizamientos son tan pequeños que no sirven para la determinación del módulo de deslizamiento.

A primera vista, eso parece no tener mucha importancia, pero volveremos a este problema más adelante. También fallan los módulos de deslizamiento para cargas pequeñas en los diagramas publicados por Hjalmar Granholm (1).

C. Cálculo de la deformación de vigas trianguladas.

En todos los procedimientos para la determinación de la deformación de una viga reticulada, sea mediante el método de los pesos elásticos, el diagrama de Williot, el de Müller-Breslau, o la ecuación de trabajo, entra el deslizamiento relativo Δs de los dos extremos de la barra considerada. En las estructuras de madera, el deslizamiento Δs de una barra, es debido a la elasticidad del material y a la deformación de las uniones, es decir:

$$\Delta s = \Delta s_E + \Delta' s$$

donde Δs_E se halla del modo conocido por la fórmula $\Delta s_E = \frac{Ss}{EF}$ y $\Delta' s$ es el

valor que corresponde al deslizamiento de las uniones. Pasamos a explicar la determinación de la segunda deformación $\Delta' s$ para una viga clavada. Para uniones con otros elementos, tales como tornillos, conectores y pasadores, se pueden aplicar las mismas fórmulas, con el módulo de deslizamiento correspondiente.

H. Granholm (1) ha hallado una fórmula particular para la viga enrejada con montantes y diagonales de tracción. En lo que sigue se considera el caso general y se hacen unas observaciones sobre su aplicación que depende de la construcción del nudo.

De la viga reticulada consideramos primeramente el enrejado (montantes y diagonales) por representar el caso más sencillo. Además de la designación usual se introduce:

n número de clavos,

c número de cortes de cada clavo.

(1) Opus cit., pág. 128

Entonces la carga N correspondiente a un clavo que trabaja a simple sección es:

$$N_1 = \frac{S}{n \cdot c} \quad (\text{Kg.})$$

Cuando hay clavos trabajando a varias secciones se debe poner:

$$n c = n_1 c_1 + n_2 c_2 + n_3 c_3 + \dots$$

El deslizamiento del extremo considerado es:

$$\Delta' s = \frac{S}{M \cdot n \cdot c} \quad (\text{cm.})$$

Para los dos extremos, superior e inferior, es:

$$\Delta' s = S \left(\frac{1}{M_o n_o c_o} + \frac{1}{M_u n_u c_u} \right) = S \Sigma \frac{1}{M n c}$$

Cuando la disposición de los clavos es igual en ambos extremos, tenemos:

$$\Delta' s = \frac{2 S}{M \cdot n \cdot c} \quad (3)$$

La deformación total de la barra es:

$$\Delta s = \Delta s_e + \Delta' s$$

$$\Delta s = \frac{S s}{E F} + S \Sigma \frac{1}{M n c}$$

$$\Delta s = \frac{S s}{E F} \left(1 + \frac{E F}{s} \Sigma \frac{1}{M n c} \right) \quad (4)$$

El segundo término entre paréntesis indica la influencia del desplazamiento de las uniones respecto a la deformación elástica de la barra.

En esta fórmula se debe poner para el módulo de deslizamiento el valor que corresponde a la carga que transmite un clavo. Cuando la viga enrejada está bien construída, dicha carga, para el caso más desfavorable del peso permanente y sobrecargas, será casi igual a la carga admisible N_1 , para un clavo, y se puede tomar por ejemplo el módulo de deslizamiento de la tabla 1.

Para los cordones no hacemos un nuevo desarrollo, sino usamos los deslizamientos calculados para las diagonales. El acortamiento $\Delta' o_{n+1}$ de la barra superior o_{n+1} de la figura 11, es la diferencia de deslizamientos entre el nudo izquierdo y el derecho en la dirección de la barra considerada.

$$\Delta' o_{n+1} = \Delta' o_{n+1,i} - \Delta' o_{n+1,d}$$

Para la proyección del deslizamiento del nudo izquierdo se obtiene en la figura 12.

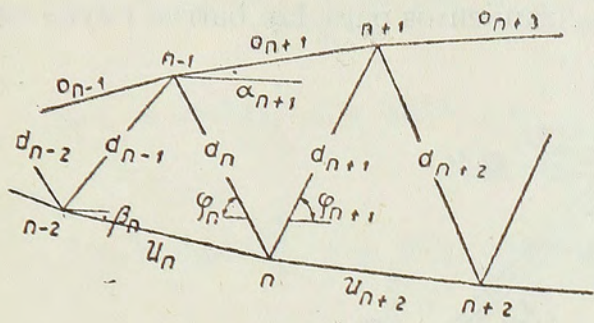


Fig. 11. Esquema de la viga.

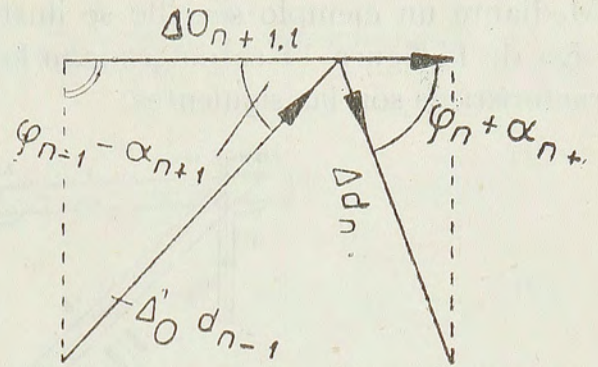


Fig. 12. Clavamiento del nudo n-1 respecto al cordón superior o

$$\Delta' o_{n+1,l} = \Delta_0' d_{n-1} \cos(\varphi_{n-1} - \alpha_{n+1}) + \Delta_0 d_n \cos(\varphi_n + \alpha_{n+1})$$

Para el nudo derecho vale análogamente,

$$\Delta' o_{n+1,d} = \Delta_0' d_{n+1} \cos(\varphi_{n+1} - \alpha_{n+1}) + \Delta_0' d_{n+2} \cos(\varphi_{n+2} + \alpha_{n+1})$$

Se puede suprimir el subíndice y resulta,

$$\begin{aligned} \Delta' o_{n+1} &= \Delta' d_{n-1} \cos(\varphi_{n-1} - \alpha_{n+1}) + \Delta' d_n \cos(\varphi_n + \alpha_{n+1}) \\ &- \Delta' d_{n+1} \cos(\varphi_{n+1} - \alpha_{n+1}) \\ &- \Delta' d_{n+2} \cos(\varphi_{n+2} + \alpha_{n+1}) \end{aligned} \quad (5)$$

Análogamente se obtiene el alargamiento de la barra inferior (fig. 13).

$$\begin{aligned} \Delta' u_n &= \Delta' d_{n-2} \cos(\varphi_{n-2} - \beta_n) \\ &+ \Delta' d_{n-1} \cos(\varphi_{n-1} + \beta_n) \\ &- \Delta' d_n \cos(\varphi_n - \beta_n) \\ &- \Delta' d_{n+1} \cos(\varphi_{n+1} + \beta_n) \end{aligned} \quad (6)$$

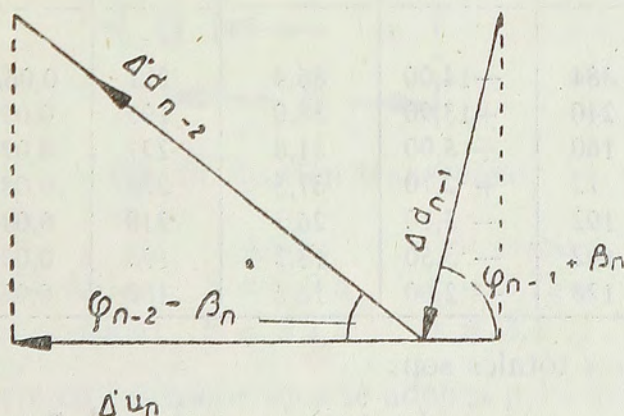


Fig. 13. Clavamiento del nudo n-2 respecto al cordón inferior u.

Mediante un ejemplo sencillo se ilustra la aplicación de estas fórmulas. En la viga de la figura 14 se determinan los deslizamientos para las barras cuyas características son las siguientes:

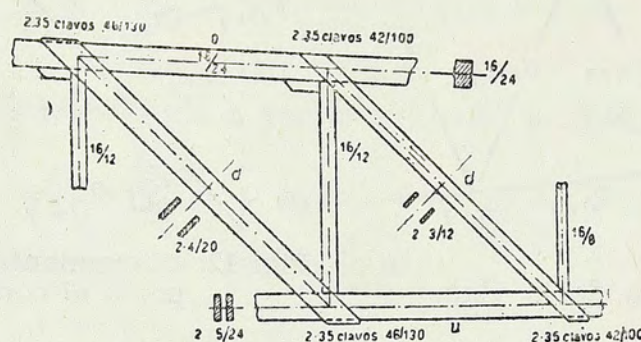


Fig. 14. Parte de la viga.

Los momentos transmiten sus respectivos esfuerzos por contacto; el ángulo de las diagonales es 45° , el ángulo a del cordón superior es $30^\circ 29'$ y con $\cos 48^\circ 29' = 0,663$, $\cos 41^\circ 31' = 0,748$, obtenemos para las diagonales:

$$\Delta' d = 2 \frac{5000}{M_{46} \cdot 35 \cdot 2} = \frac{143}{M_{46}}$$

$$\Delta' d = 2 \frac{2700}{M_{42} \cdot 35 \cdot 2} = \frac{77}{M_{42}}$$

donde M_{46} y M_{42} indican los módulos de deslizamiento correspondientes a los clavos de designación 46/130 y 42/100, respectivamente. Para el cordón superior se tiene:

$$\Delta' o = \left(\frac{71,5}{M_{46}} - \frac{38,5}{M_{42}} \right) \cdot 0,748 = 53,5 \left(\frac{1}{M_{46}} - \frac{1}{1,86 M_{42}} \right)$$

Para el cordón inferior es:

$$\Delta' u = \left(\frac{71,5}{M_{46}} - \frac{38,5}{M_{42}} \right) \cdot 0,707 = 51,5 \left(\frac{1}{M_{46}} - \frac{1}{1,86 M_{42}} \right)$$

Barra	Designac. clavos	Sección cm. ²	Fuerza t.	σ Kg./cm. ²	Longit. cm.	Δl^E cm.	Clavos	
							n	medidas
O	16/24	384	-14,00	36,4	211	0,063		
U	2.5/24	240	+13,90	58,0	195	0,0932		
d	2.4/20	160	+ 5,00	31,3	297	0,0775	2,35	46/130
d	2.3/12	72	+ 2,70	37,5	276	0,0863	2,35	42/100
v	16/12	192	- 5,10	26,5	210	0,0464		
v	16/12	192	- 3,50	18,2	195	0,0295		
v	16/8	128	- 2,00	15,6	180	0,0234		

Las deformaciones totales son:

$$\Delta o = 0,063 \left[1 + 850 \left(\frac{1}{M_{46}} - \frac{1}{1,86 M_{42}} \right) \right] \text{acortamiento (7)}$$

$$\Delta u = 0,0932 \left[1 + 542 \left(\frac{1}{M_{46}} - \frac{1}{1,86 M_{42}} \right) \right] \text{ alargamiento} \quad (8)$$

$$\Delta \bar{d} = 0,0775 \left[1 + 1850 \frac{1}{M_{46}} \right] \quad ,, \quad (9)$$

$$\Delta d = 0,0863 \left[1 + 893 \frac{1}{M_{42}} \right] \quad ,, \quad (10)$$

Los segundos términos entre corchetes son las influencias del deslizamiento de la unión clavada, las que para los cordones son pequeñas, por lo tanto en ciertos cargos se puede suprimirlas. Para las barras diagonales, la influencia es bastante superior.

D. Columnas compuestas de dos cordones.

En el cálculo de columnas compuestas entra un factor incierto relacionado con el deslizamiento de las uniones. En el reglamento DIN 1052 o DIN 1074 se prescribe una reducción del momento de inercia total respecto al eje libre y para cada barra un mínimo para el momento de inercia. Las tensiones se deforman teniendo en cuenta el coeficiente ϕ de pandeo. Sobre la determinación de las uniones no hay ninguna indicación. Este problema fué investigado por Karl Möhler 3) y Hjalmar Granholm 1).

El primer autor ha ejecutado series de ensayos en barras simples y compuestas de maderas unidas por travesaños clavados y encolados con cola sintética. Ha determinado empíricamente las relaciones más favorables entre ancho y altura de cada barra y de la separación de dos barras respecto al ancho de una barra. Resulta para dos barras unidas con travesaños, figura 15:

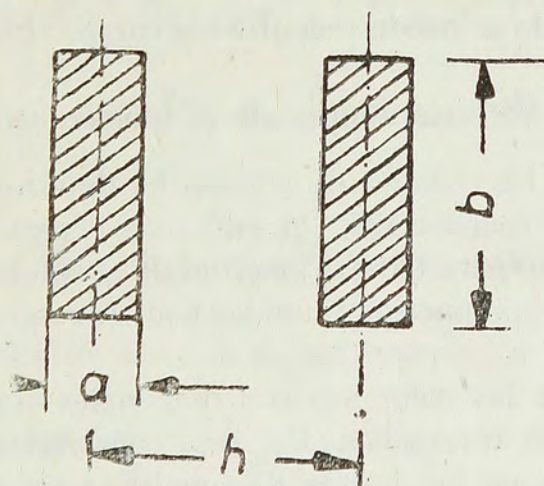


Fig. 15. Sección transversal.

	Altura	Separación
Clavado:	$b = 2,9 a$	$h = 3,75 a$
Encolado:	$b = 3,1 a$	$h = 3,1 a$

La fuerza de corte en los travesaños se adopta para ambos medios de unión a base de sus ensayos con $Q = 1,6 F$, siendo F la sección total de la barra compuesta $F = 2F_1$.

Para la separación l_1 entre travesaños la fuerza cortante en un travesaño es

$$T_1 = \frac{Q l_1}{2 h}$$

y el momento flector es:

$$M_1 = \frac{T_1 h}{2} = Q \frac{l_1}{4}$$

Mediante estos esfuerzos se determina el número de clavos o la tensión en la junta encolada con un procedimiento semejante al usado para construcciones de acero. Se observa que el número de clavos es bastante alto y el ancho de los travesaños en ambos casos es muy grande.

Granholm determina la carga mediante la fórmula:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{red}}{l^2}$$

El momento de inercia reducido para vigas triangulares es:

$$I_{red} = \frac{I}{1 + \frac{\pi^2 E I 2 l_1}{l^2 h^2 k^2}} \quad (11)$$

El coeficiente $1/k$ (*) es para la viga de celosía, figura 16

$$\frac{1}{k} = \frac{I}{2 \cos^2 \varphi} \left[\frac{h}{2 \sin \alpha} \frac{1}{E F_d^2} + \frac{c l_1^2}{6 E I_1} \sin^2 \varphi \left(1 - \frac{2 c}{l_1} \right)^3 + \frac{1}{n M} \right] \quad (12)$$

Mediante esta fórmula se puede encontrar la carga crítica de la barra compuesta.

Granholm deduce la fórmula adoptando la función senoidal $y = a_n \sin \frac{n \pi x}{l}$ para la elástica. De los ensayos de pandeo ha determinado el módulo de deslizamiento $M = 1310$ (página 176, *Op. cit.*) para clavos de 2" # 15, este módulo es un valor intermedio para toda la longitud de la columna. Por camino semejante calcula las columnas compuestas y unidas con travesaños, considerándolas como pórticos.

Es evidente que las columnas con diagonales actúan más favorablemente que las columnas con travesaños. Por esto consideramos las primeras y determinamos las fuerzas en las barras diagonales, para demostrar cómo se debe aplicar el módulo de deslizamiento. Como el cálculo exacto es muy engorroso, aplicamos el procedimiento aproximado de Müller-Breslau 2), introduciendo el módulo de deslizamiento que hemos determinado para los clavos 30/60.

Aplicamos este módulo M_{30} solamente para las barras diagonales suprimiendo su efecto para los cordones que forman la columna. El efecto en los cordones es de importancia reducida, según lo expuesto anteriormente.

El cálculo se hace para el sistema, figuras 16-17.

* Ob. cit. página 156.

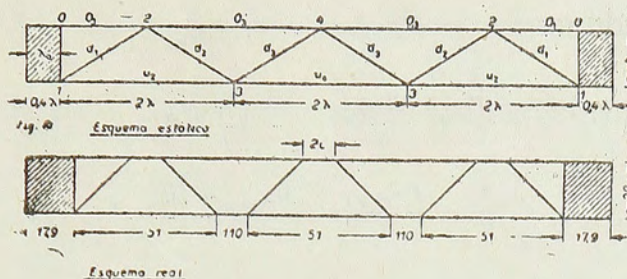


Fig. 16. Esquema estático.
Fig. 17. Esquema real.

Se usan dos grupos de ecuaciones trascendentes:

- 1) La relación conocida entre la deformación axial Δs de las barras de la viga de celosía y las ordenadas v de la elástica;
- 2) La relación entre los momentos de la viga continua (cordones de la viga anterior) y el descenso v de sus apoyos, que son los nudos de la viga de celosía.

La primera ecuación es con $\varphi_m = \varphi_{m+1} = \text{const.}$:

$$\frac{1}{k} [\Delta o_m + (\Delta d_m + \Delta d_{m+1}) \sec \varphi] = \frac{v_m - v_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{v_{m+1} - v_m}{\lambda_{m+1}}$$

Las deformaciones de las barras son:

$$\Delta o_m = \frac{D_m o_m}{E F_1} \quad \Delta u_m = \frac{U_m u_m}{E F_1} \quad (14)$$

y según fórmula (4) para clavos a corte simple

$$\begin{aligned} \Delta d_m &= \frac{D_m d_m}{E 2 F_d} \left(1 + \frac{E 2 F_d}{d_m M_n} \right) \\ \Delta d_m &= \frac{O_m d_m}{E F_1} D_m \frac{d_m F_1}{O_m 2 F_d} \left(1 + \frac{E 2 F_d}{d_m M_n} \right) = \\ &= \frac{O_m}{E F_1} D_m \frac{\kappa}{2} \cos \varphi \quad (15) \end{aligned}$$

donde:

$$\kappa = \frac{d_m F_1}{O_m 2 F_d} \left(1 + \frac{E 2 F_d}{d_m M_n} \right) \sec^2 \varphi \quad (16)$$

Se introducen los términos $\Delta o_m, \Delta d_m$ en la ecuación (13) y se obtiene el primer grupo

$$\left. \begin{aligned} + \frac{\lambda^2}{E F_1 h} [O_1 + D_1 \kappa_1 \cos \varphi] &= v_1 \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} + 1 \right) - v_2 = 3, \quad 5v_1 - v_2 \\ - \frac{2 \lambda^2}{E F_1 h} \left[U_2 + \frac{1}{2} (D_1 \kappa_1 + D_2 \kappa_2) \cos \varphi \right] &= -v_1 + 2v_2 - v_3 \\ - \frac{2 \lambda^2}{E F_1 h} \left[O_3 + \frac{1}{2} (D_2 \kappa_2 + D_3 \kappa_3) \cos \varphi \right] &= -v_2 + 2v_3 - v_4 \\ + \frac{\lambda^2}{E F_1 h} [U_4 + D_4 \kappa_4 \cos \varphi] &= -v_3 + 2v_4 \end{aligned} \right\} (17)$$

Las fuerzas de los cordones son:

$$O_m = \frac{P}{2} + \frac{P r_m}{h} - \frac{M_m + \bar{M}_m}{h} \quad (18)$$

$$U_{m-1} = \frac{P}{2} - \frac{P r_{m-1}}{h} + \frac{M_{m+1} + \bar{M}_{m-1}}{h} \quad (19)$$

Las fuerzas de las barras diagonales son:

$$D_m \cos \varphi = O_m + U_{m+1} - P \quad (20)$$

El momento entre dos nudos del cordón \bar{M}_m , opuesto al nudo m es, según Müller-Breslau 2):

$$\bar{M}_m = (M_{m-1} + M_{m+1}) \sec \frac{\alpha_m}{2} \quad (21)$$

donde:

$$\begin{aligned} \alpha_m &= l_m \sqrt{\frac{O_m}{E I_1}} \\ \alpha_1 &= \sqrt{\frac{O_1}{E I_1}} \\ \alpha_2 &= 2 \lambda \sqrt{\frac{U_1}{E I_1}} \end{aligned} \quad (22)$$

La segunda relación da la ecuación

$$\begin{aligned} M_{m-1} \frac{\xi''_m}{S_m l_m} + M_m \left(\frac{\xi'_m}{S_m l_m} + \frac{\xi''_{m+1}}{S_{m+1} l_{m+1}} \right) + \\ + M_{m+1} \frac{\xi''_{m+1}}{S_{m+1} l_{m+1}} = \frac{r_m - r_{m-1}}{l_m} - \frac{r_{m+1} - r_m}{l_{m+1}} \end{aligned}$$

$$\text{donde } \xi'_m = 1 - \alpha_m \cotg \alpha_m \quad (23)$$

$$\xi'' = \frac{\alpha_m}{\sec \alpha_m} - 1 \quad (24)$$

Para la fuerza axil se adopta: $S_m = S_{m+1} = O$.

Especialmente obtenemos en nuestro caso:

$$\left. \begin{aligned} M_0 \xi'_1 + M_2 \xi'' &= O (3,5 v_0 - v_2) \\ M_0 2 \xi'_1 + M_2 (2 \xi'_1 + \xi') + M_4 \xi'' &= O (-2v_0 + 3v_2 - v_4) \\ M_2 \xi'' + M_4 \xi' &= O (-v_2 + v_4) \\ M_1 \xi' + M_3 2 \xi'' &= U (6 v_1 - v_3) \\ M_1 \xi'' + M_3 (2 \xi' + \xi'') &= U (-v_1 + v_3) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Por la forma de la fijación de los cordones en su extremo debe ser $v_0 = v_1$

Ejemplo:

La barra compuesta —figura 16— tiene las siguientes dimensiones:

Cordones:

$$o_1 = \lambda = 31 \text{ cm}$$

$$o = u = 2 \lambda = 62 \text{ cm}$$

$$F_0 = F_u = F_1 = 5.18 = 90 \text{ cm}^2$$

$$F = 180 \text{ cm}^2$$

$$I_1 = 18 \frac{5^3}{12} = 187,5 \text{ cm}^4$$

Diagonales:

$$d = 20 \sqrt{2} = 28,2842 \text{ cm (real)}$$

$$d = \sqrt{20^2 + 31^2} = 36,8917 \text{ cm (estática)}$$

$$F_d = 2,0 \cdot 7,5 = 15 \text{ cm}^2$$

$$2 F_d = 30 \text{ cm}^2$$

$$\varphi = 45^\circ$$

$$\sec \varphi = 1,41421 \text{ (real)}$$

$$\sec \varphi = \frac{36,8917}{20} = 1,84459 \text{ (estático)}$$

El módulo de elasticidad de la madera, Pino Brasil, se introduce con $E = 120$ t/cm².

$$\frac{E F_1 h}{\lambda^2} = \frac{120 \cdot 90 \cdot 20}{31^2} = 224,766$$

$$\frac{E F_1 h}{2\lambda^2} = 112,382$$

Para determinar los valores a_1 y a (22) se introducen las fuerzas O y U de los cordones igual a $a = 3,75$ t., con esto resulta:

$$a = 31 \sqrt{\frac{3,75}{120 \cdot 187,5}} = 0,400208$$

$$a = 0,800 \quad 416$$

$$a = 45^\circ \quad 51' \quad 49''$$

Mediante estos valores a se calculan los coeficientes ζ' (23) y ζ'' (24)

$$\zeta'_1 = 1 - 0,94606 = 0,05394$$

$$\zeta''_1 = 1,0272 - 1 = 0,272$$

$$\zeta' = 1 - 0,77683 = 0,22317$$

$$\zeta'' = 1,1154 - 1 = 0,1154$$

$$\text{y } \sec \frac{a}{2} = 1,0858.$$

En las ecuaciones (25) introducimos los valores calculados ζ'_1 , ζ''_1 y ζ' , ζ'' el cociente $\frac{\lambda}{\lambda_0}$ según figura 16 es igual a $\frac{\lambda}{0,4\lambda} = 2,5$ y para las fuerzas O y U de los cordones se introduce 3,75 t., así como para a_1 y a :

$$\begin{aligned} 0,05394 M_0 + 0,0272 M_2 &= 13,125 v_1 - 3,75 v_2 \\ 0,0544 M_0 + 0,33105 M_2 + 0,1154 M_4 &= 7,5 v_1 + 11,25 v_2 - 3,75 v_4 \\ 0,1154 M_2 + 0,2235 M_4 &= -3,75 v_2 + 3,75 v_4 \\ 0,22317 M_1 + 0,1154 M_3 &= 22,5 v_1 - 3,75 v_3 \\ 0,1154 M_1 + 0,56174 M_3 &= -3,75 v_1 + 3,75 v_3 \end{aligned}$$

La solución da:

$$\begin{aligned} M_0 &= 286,19162 v_1 - 104,60298 v_2 + 11,760062 v_4 \\ M_2 &= 85,0064 v_1 + 69,56928 v_2 - 23,32124 v_4 \\ M_4 &= 43,95638 v_1 - 52,77726 v_2 + 28,862630 v_4 \\ M_1 &= 116,66511 v_1 - 22,662719 v_3 \\ M_3 &= 30,64256 v_1 + 11,33136 v_3 \end{aligned}$$

Los momentos \bar{M}_m (21) son:

$$\begin{aligned} \bar{M}_2 &= 46,70164 v_1 - 6,15180 v_3 \\ \bar{M}_3 &= -22,28606 v_1 + 9,11639 v_2 + 3,00842 v_4 \\ \bar{M}_4 &= -33,27169 v_1 + 12,30359 v_3 \end{aligned}$$

Mediante las fórmulas de equilibrio (18) y (19) se determina la fuerza en las barras diagonales (20)

$$\left. \begin{aligned} D_2 \cos \varphi &= -21,683074 v_1 + 8,333613 v_2 + 0,825546 v_3 - 1,754065 v_4 \\ D_3 \cos \varphi &= 0,731193 v_1 + 2,647644 v_2 - 0,499158 v_3 - 1,316483 v_4 \\ D_4 \cos \varphi &= 3,180666 v_1 - 3,094683 v_2 + 0,423612 v_3 + 0,917711 v_4 \end{aligned} \right\} 26$$

El módulo de deslizamiento M_{30} de los clavos 30/60 se debe introducir en la fórmula (16) en forma adecuada. Se hacen dos cálculos comparadores, y se elige M_{30} según las fuerzas estimadas en las diagonales $M = 4,0; 5,0; 6,0$ t/cm. La fórmula (16) es:

$$x = 28,28,90 \left(1 + \frac{120}{M \cdot 4.28,28} \right) 2$$

Se obtiene

$$\begin{aligned} x_2 &= 2,7372 (1 + 7,9561) = 24,515 \\ x_3 &= 2,7372 (1 + 6,3649) = 20,159 \\ x_4 &= 2,7373 (1 + 5,3041) = 14,518 \end{aligned}$$

Se componen dos grupos de ecuaciones

$$\begin{aligned} O_1 + x_2 D_2 \cos \varphi &= 3,75 - 551,32790 v_1 + 209,52867 v_2 + 21,37150 v_3 \\ &- 43,58890 v_4 \end{aligned}$$

$$U_2 + \frac{1}{2} (x_2 D_2 + x_3 D_3) \cos \varphi = 3,75 - 260,32521 v_1 + 131,93864 v_2 - 4,78027 v_3 - 35,93600 v_4$$

$$O_3 + \frac{1}{2} (x_3 D_3 + x_4 D_4) \cos \varphi = 3,75 - 33,10494 v_1 + 3,76680 v_2 - 2,14783 v_3 - 6,75824 v_4$$

$$U_4 + x_4 D_4 \cos \varphi = 3,75 + 45,64267 v_1 - 47,56747 v_2 + 6,76518 v_3 + 14,39146 v_4$$

$$\frac{E F_1 h}{\lambda^2} (-3,5 v_1 - v_2) = 766,681 v_1 - 224,766 v_2$$

$$\frac{E F_1 h}{2 \lambda^2} (-v_1 + 2v_2 - v_3) = 112,383 v_1 + 224,766 v_2 - 112,383 v_3$$

$$\frac{E F_1 h}{2 \lambda^2} (-v_2 + 2 v_3 - v_4) = -112,383 v_2 + 224,766 v_3 - 112,383 v_4$$

$$\frac{E F_1 h}{\lambda^2} (-v_3 + v_4) = -224,766 v_3 + 224,766 v_4$$

Los dos grupos son iguales cuando se cambia el signo de la segunda y cuarta ecuación de un grupo, se obtiene:

$$1338,00890 v_1 - 434,29467 v_2 - 21,37140 v_3 + 43,58890 v_4 = 3,75$$

$$372,70821 v_1 - 356,70564 v_2 + 117,16327 v_3 + 35,93600 v_4 = 3,75$$

$$-33,10494 v_1 - 116,14980 v_2 + 226,91383 v_3 - 105,62476 v_4 = 3,75$$

$$-45,64267 v_1 + 47,56747 v_2 + 218,00082 v_3 - 239,15746 v_4 = 3,75$$

La solución es:

$$v_1 = + 0,000 187 9 \text{ cm}$$

$$v_2 = - 0,009 570 8 \text{ cm}$$

$$v_3 = + 0,005 997 9 \text{ cm}$$

$$v_4 = - 0,012 162 1 \text{ cm}$$

Las fuerzas de las barras diagonales D se determinan mediante las ecuaciones (26). Sus valores y las sollicitaciones N en sus clavos son:

$$D_2 = - 53,0 \text{ Kg} \quad N_1 = 13,2 \text{ Kg}$$

$$D_3 = - 11,2 \text{ Kg} \quad N_1 = 2,8 \text{ Kg}$$

$$D_4 = 20,0 \text{ Kg} \quad N_1 = 5,0 \text{ Kg}$$

Las fuerzas son pequeñas y el módulo de deslizamiento no figura en el diagrama de la figura 10. Se puede estimar el módulo de deslizamiento M_{30} del grupo II solamente con cierta aproximación y se han adoptado los valores siguientes:

$$M_{30} = 6,0, 10,0 \text{ y } 8,0 \text{ t/cm}$$

para obtener un resultado de comparación.

Con la fórmula (16) se obtiene:

$$x_1 = 2,7372 (1 + 5,3041) = 17,25583$$

$$x_2 = 2,7372 (1 + 3,18246) = 11,44823$$

$$x_3 = 2,7372 (1 + 3,9781) = 13,62606$$

Se repite el cálculo anterior con estos coeficientes y resulta:

$$v_1 = + 0,500\ 094\ 1\ \text{cm}$$

$$v_2 = - 0,001\ 103\ 7\ \text{»}$$

$$v_3 = + 0,004\ 907\ 8\ \text{»}$$

$$v_4 = - 0,013\ 329\ 4\ \text{»}$$

Las fuerzas de las barras diagonales D y de los clavos N_1 son:

$$D_2 = - 61,5\ \text{Kg} \quad N_1 = 15,3\ \text{Kg}$$

$$D_3 = - 13,0\ \text{Kg} \quad N_1 = 3,3\ \text{Kg}$$

$$D_4 = 22,4\ \text{Kg} \quad N_1 = 5,5\ \text{Kg}$$

Los módulos de deslizamiento introducidos en este último cálculo ya alcanzan prácticamente su límite superior. La sollicitación de los clavos es pequeña; a pesar de eso, resulta desfavorable reducir su número; entonces se aumentaría la fuerza que deben transmitir y los módulos disminuirían considerablemente. El deslizamiento de las diagonales sobre cordones resultaría mayor. La flexión de los cordones y su sollicitación también aumentarían.

E. Conclusión.

Los módulos de deslizamiento de las uniones dependen de los materiales usados, así: clase de madera, clavos, conectores o los otros medios de unión, y, además, de la sollicitación de estos elementos.

En estructuras de vigas trianguladas se aconseja dar una contra flecha, para tener en cuenta la flexión elástica y la producida por el deslizamiento de sus uniones. Los medios de uniones se solicitan hasta su límite admisible y se introduce en el cálculo de deformación el módulo que corresponde a este límite.

Para columnas enrejadas se aconseja que los clavos tengan una sollicitación baja para disminuir el deslizamiento; en caso contrario los cordones deben resistir a esfuerzos mayores. El último efecto se ve bien mediante la fórmula (11) aplicada por Granholm.

Por el cálculo anterior se ha mostrado la variación de la fuerza en las diagonales.

BIBLIOGRAFIA

- 1.—GRANHOLM H.: *Om Sammansatta Balkar och Pelare Med Särskild Hänsyn Till Spikade Träkonstruktioner*, Göteborg 1949.
- 2.—MULLER-BRESLAU H.: *La Scienza delle Costruzioni*. Tomo IV.
- 3.—GABER E.: *Versuche über ein-und zweiteilige hölzerne Druckstäbe*, Bautechnik Volumen 21 (1943) N.º 38/42.
- 4.—MOHLER K.: *Tragkraft und Querkraft Von ein-und mehrteiligen Holzdruckstäben nach Rechnung und Versuch, Bauplanung und Bautechnik*. Vol 2 (1948) números 2 y 11.
- 5.—GRANHOLM H.: *Vigas y columnas compuestas*. Informes de Construcciones N.º 42 (junio-julio 1952). Publicado durante la impresión del trabajo.