Ing. Víctor Granifo Harms

El escurrimiento crítico, producido por ensanches

a) GENERALIDADES

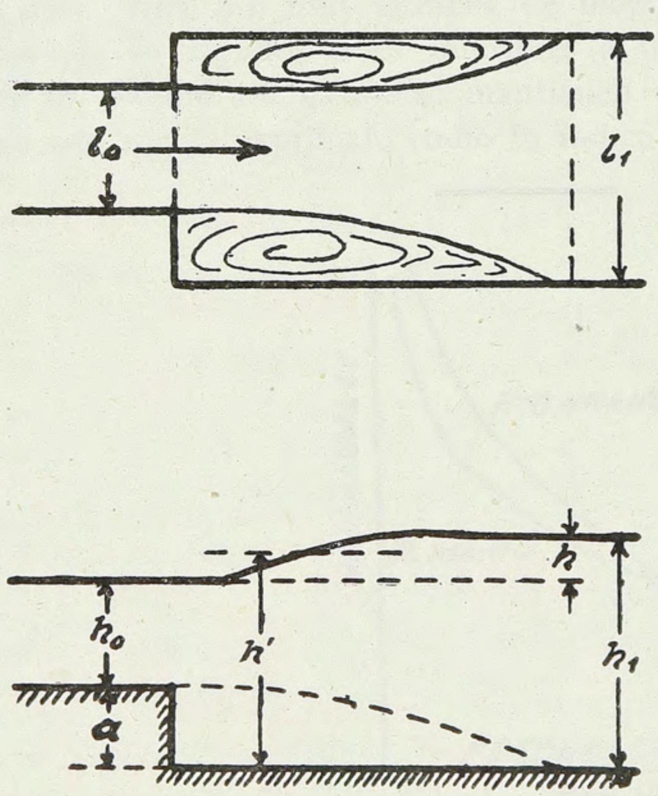


Fig. 1.

Sea el caso de un ensanche brusco de ancho y cota de fondo, como el indicado en la *figura 1*.

La ecuación general que relaciona las alturas anteriores y posteriores a un ensanchamiento brusco en contornos abiertos, es la ecuación de la «Momenta» que resulta de la aplicación del teorema de las cantidades de movimiento, y que se indica a continuación:

$$\frac{1}{x_1} - \frac{n}{x_o} = \frac{x'^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}$$

en que

$$x_1 = \frac{h_1}{h_{c1}} \quad ; \quad x_o = \frac{h_o}{h_{c1}}$$

$$n = \frac{l_1}{l_o} \quad ; \quad x' = \frac{h'}{h_{c1}}$$

siendo

$$h' = h_1 - \varepsilon\, h$$

h_{c1} = altura crítica en la sección de aguas abajo
$h_{co} = h_c$ = altura crítica en la sección estrecha.

Para el caso en estudio, producción de escurrimiento crítico con régimen de río afluente al ensanche, se tiene:

$$\varepsilon = 1 \quad \text{y} \quad h_o = h_c$$

Luego:

$$x_o = \frac{h_o}{h_{c1}} = \frac{h_c}{h_{c1}} = n^{2/3}$$

$$\text{y} \quad h' = h_o + a$$

por tanto $x' = x_o + K$

Introduciendo, en la ecuación de la Momenta, los valores de x_o y x', se tiene:

$$(1) \qquad K = -\, n^{2/3} + \sqrt{x_1^2 + \frac{2}{x_1} - 2n^{1/3}}$$

Esta ecuación que designaremos por

$$(2) \qquad f(K, n, x_1) = 0$$

resuelve el problema de la producción de crisis, para el caso de régimen de río afluente a un ensanche brusco de ancho y de cota; es decir permite, para una relación de ensanche «n» y un gasto «Q», calcular la altura de grada «a», que produce el escurrimiento crítico.

Sin embargo, si para una relación de ensanche «n», se desea conocer la menor altura de grada que produce el escurrimiento crítico para cualquier valor del gasto —caso de los medidores o marcadores de escurrimiento crítico— esta ecuación sólo permite resolver el problema por puntos. En efecto, es necesario en este caso hacer el cálculo para diferentes valores del gasto y elegir de todas las alturas de grada resultantes, la de mayor valor numérico.

Se denominará «grada determinante», la menor altura de barrera que para una relación de ensanche «n», garantiza la crisis para cualquier valor del gasto y «gasto determinante», el gasto que exige la «grada determinante» para la producción del escurrimiento crítico.

La relación entre la mayor altura «h_1» de aguas abajo que no ahoga la crisis y la altura crítica «h_c», se designará por Z. Se tendrá entonces, en el límite del escurrimiento crítico: $h_1 = Zh_c$.

b) GRADA DETERMINANTE

En la ecuación

$$(2) \qquad f(K, n, x_1) = 0$$

introduciendo

$$K = \frac{a}{h_{c1}} \quad y \quad x_1 = \frac{h_1}{h_{c1}}$$

se tiene

$$f\left(\frac{a}{h_{c1}},\ n,\ \frac{h_1}{h_{c1}}\right) = 0$$

Luego

$$(3) \qquad f_1(a, n, h_1, h_{c1}) = 0$$

Recordando

$$h_{c1} = n^{-2/3}\, h_c = \left(n^{-2/3} \sqrt[3]{\frac{1}{g}}\right) q^{2/3}$$

en que «q» es el gasto por metro de ancho en la sección estrecha, se tiene

$$(4) \qquad \varphi\ (a, n, h_1, q) = 0$$

La función $\varphi(a, n, h_1, q) = 0$ indica, que para un determinado valor de n, se tiene:

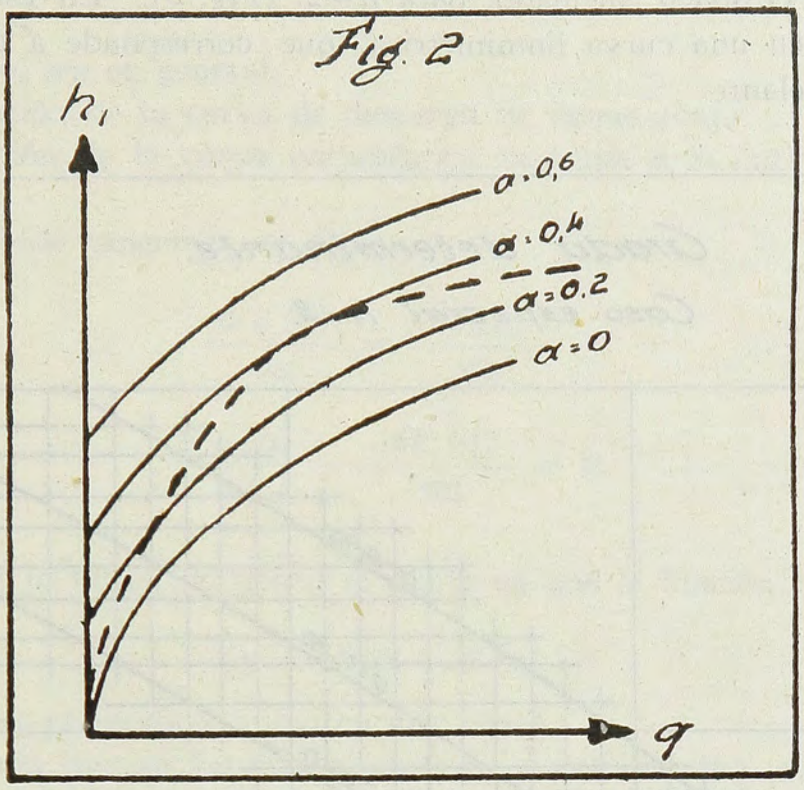
$$\varphi_n\ (a, h_1, q) = 0$$

es decir que es posible dibujar en un gráfico de coordenadas h_1—q, un conjunto de curvas que indican para cada valor del parámetro «a», las alturas límites de aguas abajo compatibles con el escurrimiento crítico para los diferentes valores del gasto por metro de ancho en la sección estrecha. (*Fig. 2*).

La curva de descarga $h_1 = F(Q)$ se puede dibujar en un gráfico $h_1 = F(q)$; ya que esto sólo equivale a dividir los gastos por el valor «l_o».

Para determinar el valor de la «grada determinante» se coloca la curva de descarga $h_1 = F(q)$ sobre el abaco de la figura (*Fig. 2*).

Las distintas curvas paramétricas que la curva de descarga va cortando en el gráfico, representan la altura de grada requerida para el gasto correspondiente a ese punto de intersección.



En esta forma la mayor altura de grada requerida es la que corresponde a la curva paramétrica de mayor valor numérico y ésta no puede ser otra que la que es tangente a la curva de descarga; ya que a ambos lados de ese punto las curvas paramétricas son de acotamiento inferior.

Resulta entonces que la «grada determinante» queda indicada por el valor del parámetro de la curva que es tangente a la limnimétrica de aguas abajo (En el caso de la figura 2, $a = 0{,}40$.)

Abaco para el cálculo de la grada determinante. Caso especial $n = 2$

Para dibujar el abaco que representa la ecuación

$$\varphi_2\ (a,\ h_1,\ q) = 0 \qquad n = 2$$

se ha seguido, para cada una de las curvas paramétricas, el siguiente método:

1) Para cada valor de q, se calcula el valor de h_{c1} $(n = 2)$

2) Se calcula el valor de $K = \dfrac{a}{h_{c1}}$

3) Se calcula a través de la ecuación de la «Momenta»

$$f(K,\ n,\ x_1) = 0, \text{ el valor de } x_1 = \frac{h_1}{h_{c1}}$$

4) Se calcula $h_1 = x_1 \cdot h_{c1}$

Se debe hacer notar que este método para construir el abaco tiene validez general y tanto se puede recurrir en 3) a la «Momenta» como a resultados experimentales.

Se incluye el abaco calculado, para n = 2. (*Fig. 3*). En este abaco, se ha dibujado también una curva limnimétrica, que corresponde a un ejemplo que se hará más adelante

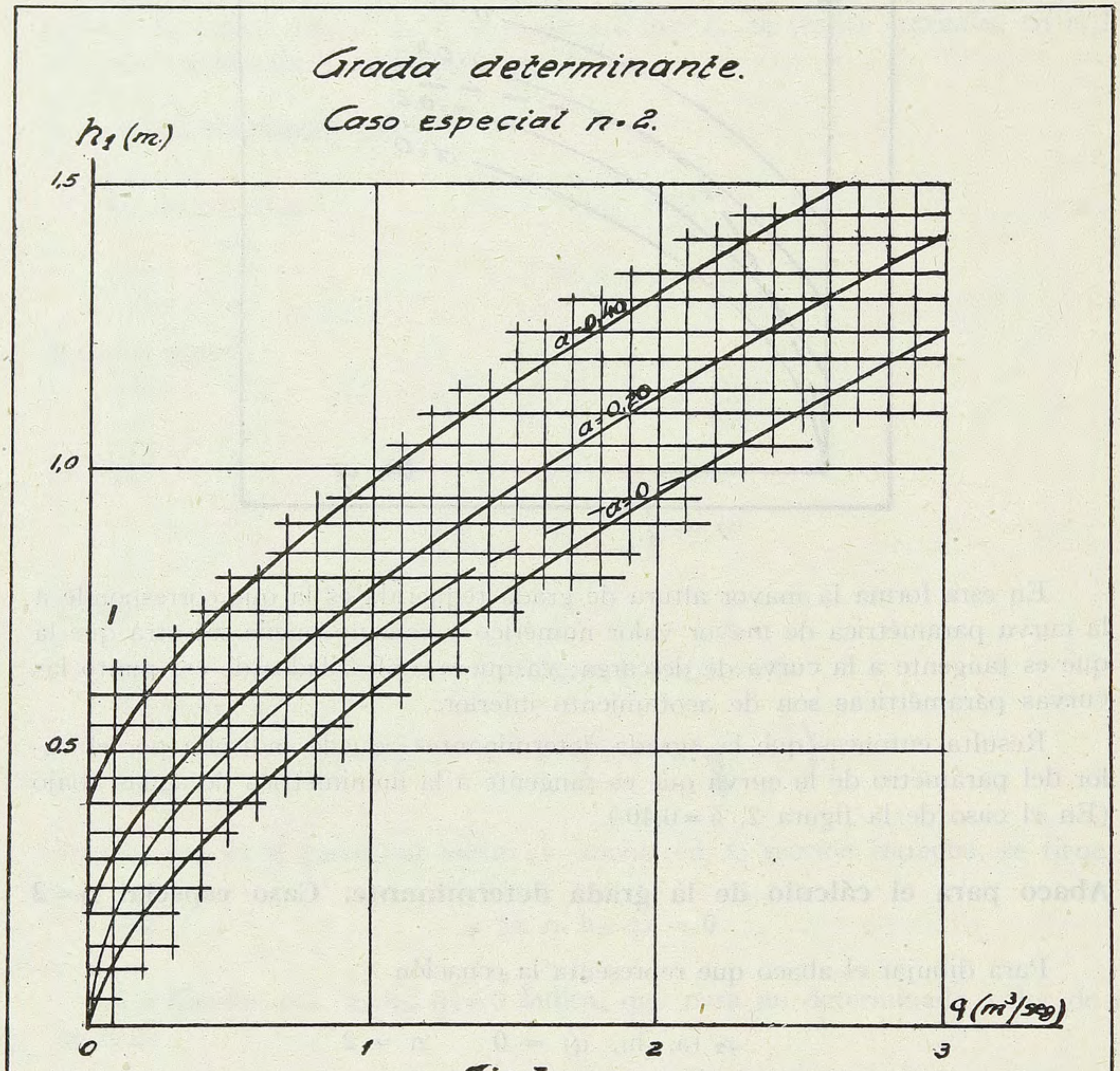


Fig. 3.

c) **GASTO DETERMINANTE**

Se ha denominado «gasto determinante», al gasto que exige, para una relación «n» dada, la mayor altura de barrera para producir el escurrimiento crítico, y que como se ha visto en el párrafo anterior, es el gasto correspondiente al punto de tangencia de la curva de descarga y una de las curvas paramétricas de la función

$$\varphi_n \,(a,\ h_1,\ q) = 0$$

Respecto a la ecuación fundamental

(4) $\varphi(a,\ n,\ h_1,\ q) = 0$

no se conoce la expresión de esta función y por ello no se ha podido sacar mayores conclusiones.

Sin embargo, sea en general

$h = F(q)$ la ecuación de la curva de descarga de aguas abajo

$h = \varphi(q)$ la ecuación de la curva paramétrica tangente a la curva anterior.

En el punto de tangencia, se tiene:

$$\frac{d\,\varphi\,(q)}{dq} = \frac{dF(q)}{dq}$$

$$\frac{d\,\varphi\,(q)}{dq} - \frac{dF\,(q)}{dq} = 0$$

Se trata por lo tanto, de ubicar el punto en que la función

$$y = \varphi\,(q) - F\,(q)$$

pasa por un valor extremo (mínimo en este caso).

Si se recuerda que en las cercanías de un valor extremo, a grandes variaciones de la variable corresponden variaciones despreciables de la función, se comprende que no es necesaria la determinación exacta del «gasto determinante» y que gastos que difieren de éste, en cantidades relativamente apreciables, cortan curvas paramétricas de acotamiento muy poco inferior.

Se deduce, entonces, que para el cálculo de la «grada determinante», sería suficiente con calcular aproximadamente el valor del «gasto determinante» y calcular la altura de la grada correspondiente, con cualesquiera de los abacos de la Hidráulica Teórica de don F. J. Domínguez.

Una solución para el cálculo aproximado del «gasto determinante», se encuentra en el caso especial de la función $\varphi(a, n, h_1, q) = 0$ para $a = 0$:

$\varphi_0(n, h_1, q) = 0$, que corresponde a la curva paramétrica $a = 0$, o sea el caso de ensanche por simple variación de ancho.

Para el análisis y cálculo de esta función, reproduciré las ideas que incluyo en la Memoria con que opté al título de Ingeniero Civil : «Mejoramiento de Riego del Río Maule».

Ensanches bruscos por simple variación de ancho ($a = 0$)

La ecuación de la «Momenta», se transforma para este caso especial, introduciendo $a = 0$, en:

$$(5) \qquad 0 = -n^{2/3} + \sqrt{x_1^2 + \frac{2}{x_1}} - 2n^{1/3}$$

Se tiene entonces, una función

$$f(x_1, n) = 0$$

o

$$(6) \qquad \varphi_0(n, h_1, q) = 0$$

De la ecuación (5) se desprende que el valor de x_1 que garantiza la crisis, depende únicamente de «n», o sea de la relación de ensanche.

En consecuencia, se tendrá crisis para todos los gastos a los que corresponde un valor de x_1, menor que el que satisface la ecuación (5) y que designaremos por $(x_1)_n$.

Las alturas h_1 de aguas abajo, límites del escurrimiento crítico se deducen de la ecuación

$$h_1 = (x_1)_n \cdot h_{c1}$$

Introduciendo

$$h_{c1} = n^{-2/3} h_c$$

resulta

$$h_1 = (x_1)_n \cdot n^{-2/3} h_c$$

El término $(x_1)_n \cdot n^{-2/3}$ para una relación de ensanche dada, es una constante, de modo que h_1 altura límite de aguas abajo compatible con la crisis, resulta ser directamente proporcional a la altura crítica h_c.

En a) Generalidades, se llamó Z a esta razón entre la mayor altura de aguas abajo compatible con la crisis y h_c. Esta relación para el caso particular en estudio $a = o$, la designaremos por Z_o, de modo que se tiene:

$$Z_o = (x_1)_n \cdot n^{-2/3} = C^{te}$$

Demostrada la constancia de Z_o, para una determinada relación de ensanche; la ecuación φ_o $(n, h_1, q) = 0$ se traduce en:

$$h_1 = Z_o h_c = Z_o \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = Z_o \sqrt[3]{\frac{1}{g}} q^{2/3}$$

$$h_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{g}} \cdot Z_o \cdot q^{2/3}$$

siendo Z_o un valor que depende únicamente de n.

Se acompaña el gráfico $Z_o = f(n)$ (*Fig. 4*).

La ecuación (8) se puede escribir

$$h_1 = K' q^{2/3}$$

o también

$$q = K'' h_1^{3/2}$$

Se puede obtener entonces, para cada valor de «n», una parábola de grado 3/2, $q = K'' h_1^{3/2}$ que indica para cada valor del gasto, el mayor valor de h_1 (altura límite de aguas abajo) que no ahoga la crisis.

Estas curvas se han dibujado en el abaco que se indica en la *Fig. 5* (De la Memoria «Mejoramiento de Riego del Río Maule»).

Curvas de descarga

Respecto a las curvas de descarga, $Q = f(h_1)$, nada se puede decir sobre el grado de ellas; por el contrario se sabe —y ahí radica la dificultad del problema— que su grado es variable.

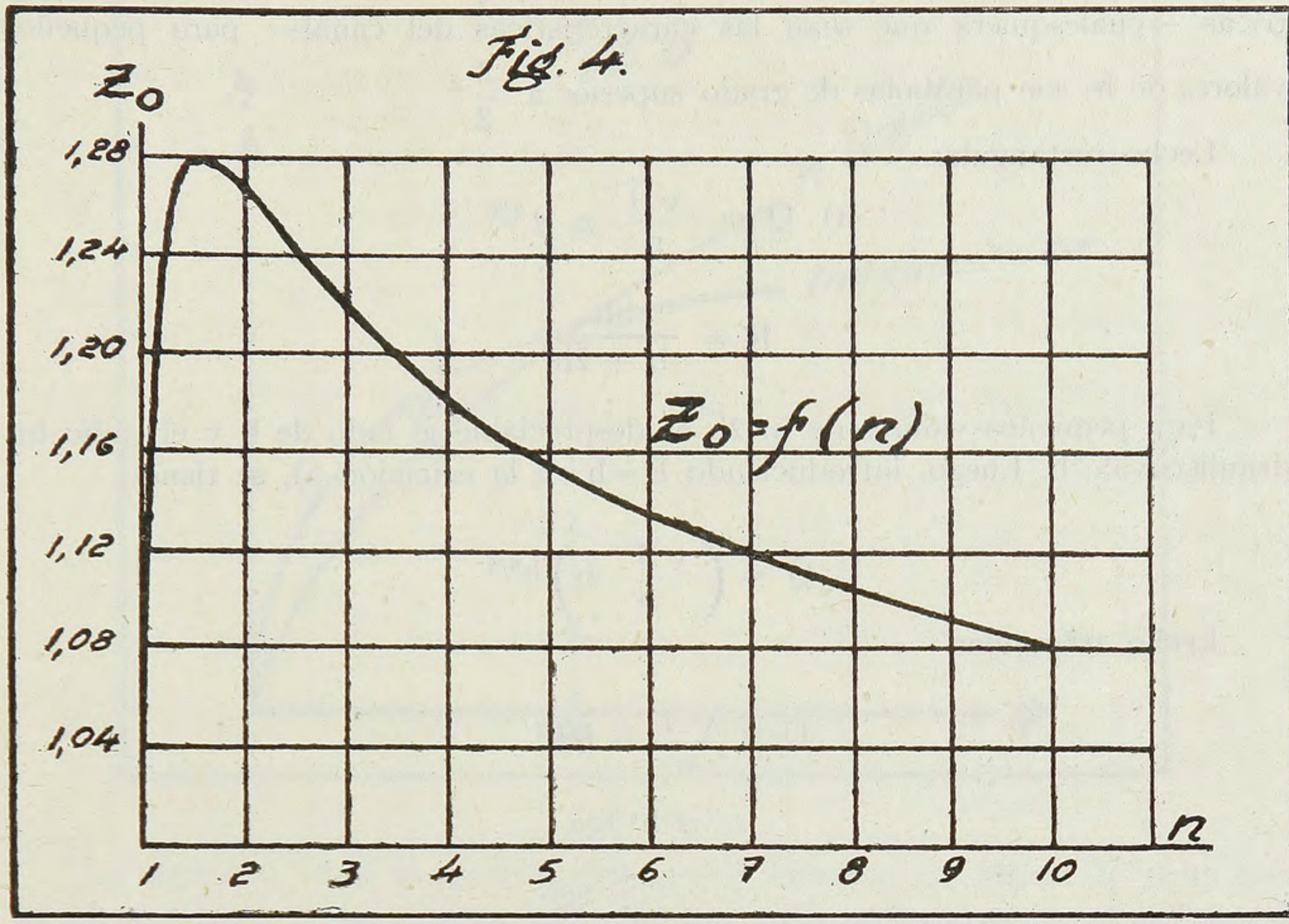

Zo
1,28
1,24
1,20
1,16
1,12
1,08
1,04
Zo=f(n)
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
n

Fig. 4.

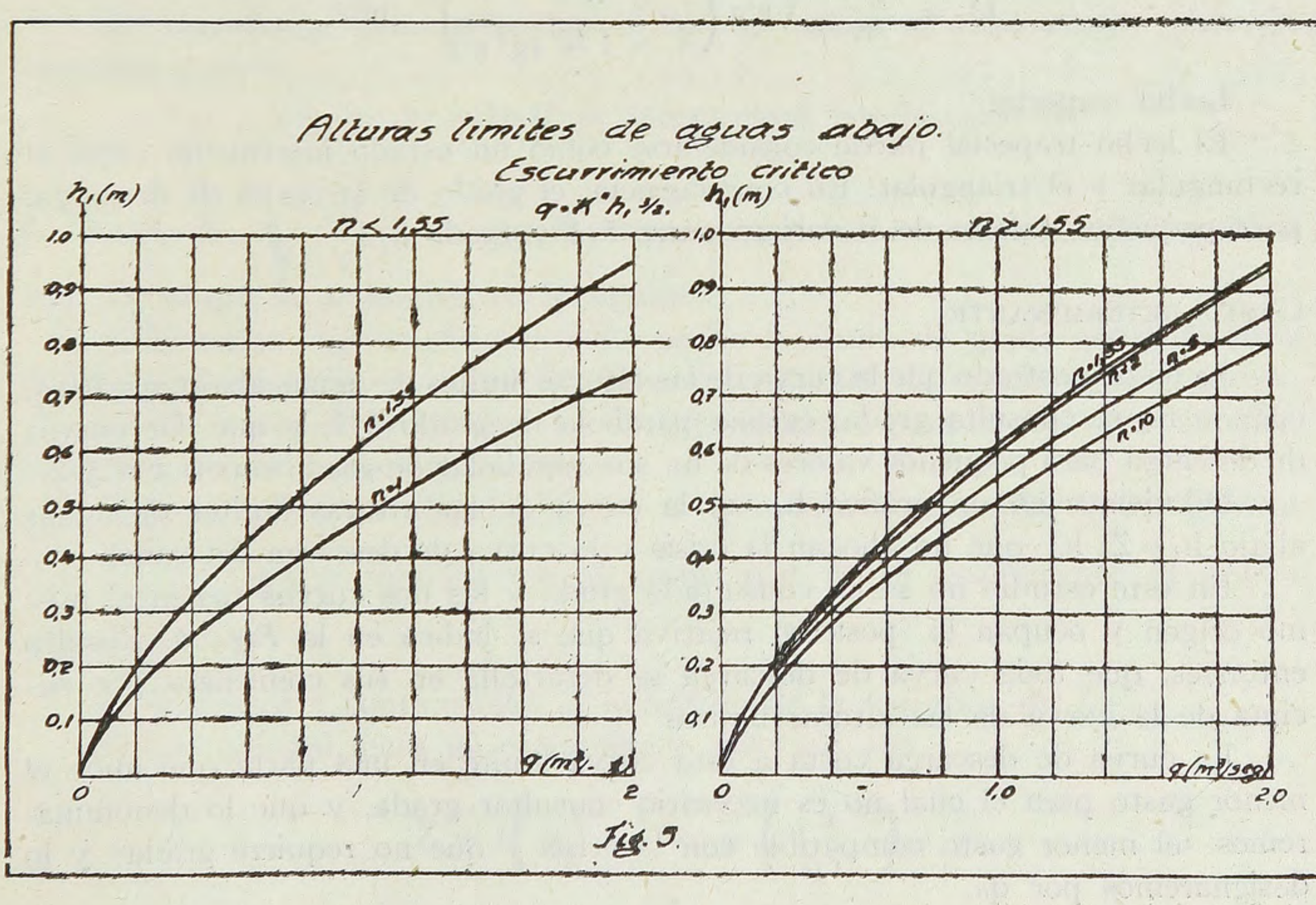

Alturas límites de aguas abajo.
Escurrimiento crítico
h₁(m)
n<1,55
n>1,55
n=1,55
n=1
n=10
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1
2
1,0
2,0
q(m³/seg)

Fig. 5.

Sin embargo, se demostrará a continuación que todas las curvas limnimétricas —cualesquiera que sean las características del canal— para pequeños valores de h_1 son parábolas de grado superior a $\frac{3}{2}$

Lecho rectangular

$$a)\quad Q = \frac{\sqrt{I}}{n}\, \Omega\, R^{2/3}$$

$$R = \frac{bh}{b + 2h}$$

Para pequeños valores de h, 2h es despreciable al lado de b y el radio hidráulico vale h. Luego, introduciendo R = h en la ecuación a), se tiene:

$$Q = \left(\frac{\sqrt{I}}{n}\, b\right) h^{5/3}$$

Lecho triangular

$$Q = \frac{\sqrt{I}}{n}\, \Omega\, R^{2/3}$$

$$\Omega = h^2\, tg\alpha$$

$$R = \frac{\frac{1}{2}\, tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$$

Luego

$$Q = \frac{\sqrt{I}}{n}\, tg\,\alpha \left(\frac{tg\,\alpha}{2\sqrt{1 + tg^2\alpha}}\right)^{2/3} h^{8/3}$$

Lecho trapecial

El lecho trapecial puede considerarse como un estado intermedio entre el rectangular y el triangular. En consecuencia, el grado de la curva de descarga, para pequeños valores de h variará entre 5/3 y grado 8/3.

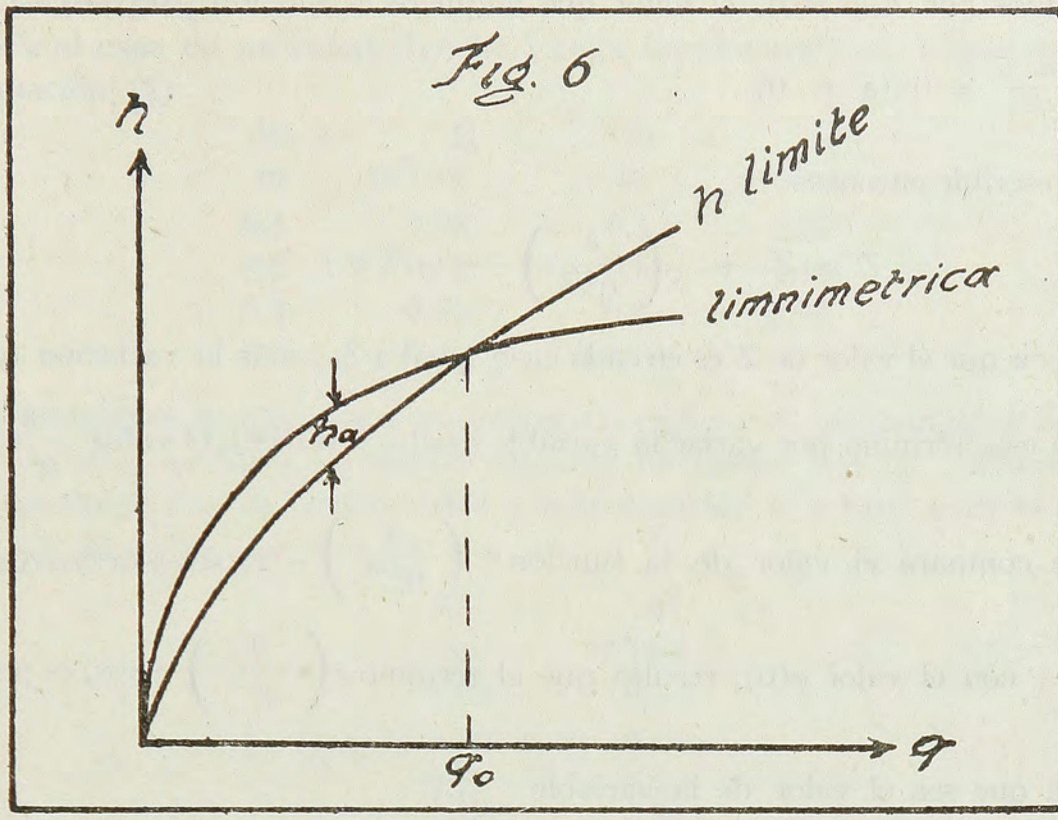
Gasto determinante

Se ha demostrado que la curva de las alturas límites de aguas abajo, $q = f(h_1)$, cuando no se consulta grada, es una parábola de grado 3/2, y que las curvas de descarga para pequeños valores de h_1, son parábolas de grado superior a 3/2.

Dibujemos en un gráfico h_1—q, la curva de las alturas límites de aguas abajo $h_1 = Z_o\, h_c$ que no ahogan la crisis y la curva de descarga del canal.

En este estudio no se ha consultado grada y las dos curvas tienen el mismo origen y ocupan la posición relativa que se indica en la *Fig. 6*. Resulta entonces, que toda curva de descarga se desarrolla en sus comienzos por encima de la curva de las alturas límites.

La curva de descarga corta a esta curva límite en una parte que mide el menor gasto para el cual no es necesario consultar grada, y que lo denominaremos «el menor gasto compatible con la crisis y que no requiere grada» y lo designaremos por q_o.



La altura h_a (*Fig. 6*) mide lo que podría llamarse: «la altura de agua que ahoga la crisis». Esta altura «h_a» vale cero para gasto cero, y para el gasto «q_o»; en consecuencia, pasará obligadamente por un máximo para un cierto gasto desconocido.

El gasto correspondiente al máximo valor de «h_a», es el «gasto determinante del ahogue máximo, para $a=0$» y lo designaremos por «q'_d».

Es conveniente hacer notar que si Z_o no variara al introducir la grada, la ecuación general

$\varphi(a, n, h_1, q) = 0$, se interpretará por la ecuación

$h_1 = a + Z_o \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$, en que Z_o, representa el valor considerado de Z (Abaco *Fig. 4*), lo que se traduciría en lo siguiente:

a) El valor «h_a» mediría en cada punto la altura de grada necesaria para el escurrimiento crítico y su mayor valor representaría la «grada determinante».

b) «El gasto determinante del ahogue máximo, para $a=0$» sería también el «gasto determinante» ($q'_d = q_d$).

Se sabe que en realidad Z varía al introducir una grada. Y en general $Z = f\left(\frac{a}{h_c}\right)$ lo que significa que el gasto «q'_d» no es exactamente el «gasto determinante».

Se estudiará a continuación la influencia de la variación de Z.

Sea en general, para un determinado valor de «n»

$$Z = f\left(\frac{a}{h_c}\right) = \varphi\left(\frac{a}{q^{2/3}}\right)$$

y designemos por $Z_o = \varphi(o)$, el valor que adquiere la función para el caso especial $\frac{a}{q^{2/3}} = 0$ $(a = 0)$.

Podemos escribir entonces

$$Z = Z_o + \varphi\left(\frac{a}{q^{2/3}}\right) - \varphi(o)$$

Es decir que el valor de Z es en cada caso igual a Z_o, más la variación que experimenta este término por variar la variable desde cero hasta el valor $\frac{a}{q^{2/3}}$

Si se compara el valor de la función $\varphi\left(\frac{a}{q^{2/3}}\right)$ — ya sea teóricos o experimentales— con el valor $\varphi(o)$; resulta que el término $\varphi\left(\frac{a}{q^{2/3}}\right) - \varphi(o)$ es pequeño cualquiera que sea el valor de la variable $\frac{a}{q^{2/3}}$

Resulta, entonces, que la variación que experimenta el término Z, aún para grandes variaciones de la variable $\frac{a}{q^{2/3}}$ es pequeña y por lo tanto es sólo un pequeño porcentaje del término constante Z_o.

Se comprende entonces que para pequeñas variaciones del valor de la variable $\left(\frac{a}{q^{2/3}}\right)$ las variaciones de la función $\varphi\left(\frac{a}{q^{2/3}}\right)$ sean prácticamente despreciables. Es decir, que entre dos gastos «q» y «q+dq» (para una misma altura de grada «a») el valor de Z casi no varía.

Resulta entonces, que para un determinado gasto q, en cada curva parámetrica se tiene un valor diferente de Z, pero la variación que experimentan estos valores al aumentar el gasto de «q» a «q+dq» es despreciable y casi no se comete error al suponer que las curvas parámetricas son sensiblemente paralelas para cada valor del gasto.

Estas consideraciones y lo que ya se ha dicho sobre la pequeña influencia que tiene la determinación exacta del «gasto determinante» para el cálculo de la «grada determinante», permiten aceptar el gasto «q'_d» como el «gasto determinante».

El cálculo de la grada determinante se hará entonces, en la siguiente forma: se coloca la curva de descarga, dibujada en papel transparente, sobre el abaco único indicado en la *Fig. 5*, y se determina el valor «q'_d», que es el gasto al que corresponde el mayor valor de «h_a». Con este gasto se calcula la «grada determinante».

d) Ejemplo

Sea el caso de un canal ($l_1 = 4$m.) cuya limnimétrica es la que se indica a continuación (1)

h_1 m	Q m^3|seg	h_1 m	Q m^3|seg
0,1	0,08	0,5	1,02
0,2	0,18	0,6	1,46
0,3	0,40	0,7	1,98
0,4	0,68		

Supongamos que se desea proyectar en este canal un marcador de escurrimiento crítico, dando a la sección estrecha un ancho $l_o = 2$m. (Resulta $n = 2$),

Transformamos la limnimétrica a una ecuación $h_1 = F(q)$ para lo cual basta dividir el gasto por $l_o = 2$m.

h_1 m	q m^3|seg
0,10	0,04
0,20	0,09
0,30	0,20
0,40	0,34
0,50	0,51
0,60	0,73
0,70	0,99

Primera solución (Usando el Abaco *Fig. 3*)

Observando la *Fig. 3* se observa que la limnimétrica es tangente a la curva paramétrica de acotamiento $a = 0,135$ m. Del mismo gráfico se desprende que el gasto $q = 0,5$ m^3|seg, es el «gasto determinante».

Segunda solución (Usando el Abaco $f(K, n, x_1) = 0$)

En el cuadro siguiente se calcula por puntos, el valor de la «grada determinante», que fija automáticamente el «gasto determinante».

q	h_{c1}	h_1	x_1	K	a
0,10	0,063	0,21	3,33	1,43	0,090
0,20	0,101	0,30	2,97	1,06	0,107
0,30	0,132	0,37	2,80	0,87	0,115
0,40	0,160	0,44	2,75	0,81	0,130
0,50	0,185	0,495	2,67	0,73	0,135
0,60	0,209	0,54	2,58	0,63	0,132
0,70	0,232	0,585	2,52	0,56	0,130
0,80	0,254	0,63	2,48	0,51	0,129
0,90	0,274	0,665	2,43	0,46	0,126
1,00	0,294	0,70	2,30	0,41	0,121

(1) Esta curva se obtuvo experimentalmente y corresponde al Canal San Dionisio en el Río Maule, que riega 1.200 cuadras (De la Memoria: «Mejoramiento de Riego del Río Maule»).

Tercera solución (Usando el Abaco *Fig. 5*)

Si se dibuja la curva de descarga sobre la figura 5, se observará que el ahogue máximo se produce para el gasto q = 0,5, lo que como se vió en la segunda solución exige la grada a = 0,135 m.

Este canal funciona normalmente con 3 o 4 m^3|seg.—La curva de descarga sólo se obtuvo hasta un gasto de 2m^3/seg, porque en la época en que se hicieron los aforos, el racionamiento extraordinario de las aguas a que estaba sometido el Río Maule no permitía a este canal captar su dotación normal.

Extrapolando la curva de descarga, se observa que para gasto normal (4 m^3|seg) y para la relación de ensanche n = 2, no se requiere grada para tener crisis.

e) Aplicación

La deducción del abaco (*Fig. 5*) se ha basado en la ecuación de la «Momenta» aplicada a ensanches bruscos. Sin embargo ella también es válida para barreras triangulares y para ensanches paulatinos, siempre que cada pared se abra con un ángulo que no pase de 15°.

«La razón de esta coincidencia se puede hallar considerando que en estas estructuras ordinariamente el resalto termina en la anchura final de la construcción y prima la razón de anchuras terminales sobre el ángulo con que las paredes se abren.» (F. J. D., pág. 430.)

De todos modos es necesario hacer notar que el cálculo a través del «gasto determinante» y todas las consideraciones que sobre esto se han hecho, da validez general al método de cálculo que aquí se ha estudiado, ya que para el cálculo de la «grada determinante» se entrará con este gasto en el abaco correspondiente.

V. G. H.