DOS CARTAS DE SPINOZA: UN BREVE COMENTARIO

Godofredo Iommi Amunátegui
Universidad Católica de Valparaíso

I

En una correspondencia —por escasa que sea— a menudo una reflexión se cristaliza de modo peculiar, como si la ocasión fuese un reactivo en virtud del cual se manifestara cierto nervio crucial, elíptico e inesperado. He leído ciertas cartas de Spinoza a través de una rendija —matemática— por la cual pasa una luz oblicua, dándoles a los conceptos un perfil acusado y fugitivo. Dos de tales cartas ofrecen, me parece, no sólo comentario o esclarecimiento casual de algún tópico peculiar del corpus de la obra. En ellas comparece un espacio conceptual poco frecuentado. Estas páginas quisieran deslindar algunos de tales dominios del pensamiento de Spinoza.

La traducción consultada de la correspondencia es de Atilano Domínguez (Alianza Editorial, Madrid, 1988). Los números de páginas y líneas remiten a esta edición. La versión francesa de Charles Appuhn también ha sido considerada (Obras, T. IV, Garnier-Flammarion, Paris, 1966).

II
El Juego
(Carta a Johannes van der Meer; 1 de octubre 1666)

El juego. Tal vez sea bueno dejar por un momento la mente en blanco o mejor aún favorecer su deriva por los ecos de esa palabra —juego—, sin

Trabajo patrocinado por FONDECYT (proyecto 0431-90)

precisar un sentido. Pienso, tal estado de distraída cavilación hace más audible la nota fundamental —y sus armónicos retraídos— de estas líneas dedicadas a Spinoza, especulando acerca del arte de jugar:

"Mientras me hallo aquí, en soledad, en el campo, me he dedicado a pensar sobre el problema que usted me había planteado...". Así comienza la respuesta a Van der Meer —única misiva conocida, entre ambos, por lo demás (páginas 258-260). Nótese la distancia respecto de la trama misma de aquello —el juego— cuyo análisis se propone: en soledad, en el campo. Viene a la memoria el "beatus ille...".

Distancia interior establecida desde el inicio. Cabe señalar otro comienzo, histórico esta vez: la ciencia y el arte del juego atraviesan de soslayo el pensamiento matemático desde fines del siglo XV, cuando nace en Italia una suerte de furor por y de la apuesta.

Esa curiosa pasión propicia nuevos algoritmos. Como suele, una reacción contraria prohíbe a diestra y a siniestra. La censura sesga obras a la salida de la imprenta. En consecuencia, por años la incipiente teoría de las probabilidades es asunto de palabra. El opúsculo de C. Huygens, *Tractatus de ratiocinibus in aleae ludo*, escrito en holandés en 1656-1657, cuya versión latina es de F. van Schooten, constituyó hasta la publicación de *Ars Conjectandi* de J. Bernoulli, la única exposición completa de la teoría de los juegos (véase *Christiaan Huygens's contribution to the development of a calculus of probabilities*, Ivo Schneider, Janus vol. 67 N° 4, pp. 269-279, 1980). Me detendré un instante en detalles a primera vista impertinentes: Huygens, "Señor de Zeelhem", fue vecino de Spinoza (sus conversaciones, parece, versaban sobre óptica. Ni las razones ni el alcance de sus intereses respectivos, en tal materia, coincidían. En 1668, Constantijn escribe a su hermano Christiaan y elogia ciertas lentes pulidas por el "juif de Voorburg", pensando en una posible adquisición) y Jan de Witt, jefe de gobierno, y autor de un texto acerca del cálculo de probabilidades aplicado a las rentas vitalicias, su amigo. Huygens y de Witt, en algún momento de sus vidas, tuvieron por maestro a Frans van Schooten. Esta red de relaciones establece una suerte de espacio mental, en el cual una vertiente del pensamiento aquí estudiado revela rasgos pocos aparentes, resonancias inesperadas.

Esta carta, decíamos, responde a una misiva ausente y trata de la suerte. O tal vez precisando: de la justicia en el juego de azar. Quisiera poner ante el lector los elementos de la construcción de un concepto ético, y en lo posible insinuar, a través de la peripecia técnica, el temple del pensador. "Es justo aquel jugador que establece para sí la misma suerte de ganar o de perder que para su contrincante. Esa suerte consta de la probabilidad y del dinero que los contrincantes apuestan y arriesgan". La reflexión de Spinoza se orienta al estudio de la suerte de cada jugador. La probabilidad matemática de ganar o de perder debe ser proporcional al dinero apostado. Tal proporción ha de ser igual para todos los jugadores. La justicia entonces equivale a: suerte igual para cada jugador. Este concepto de *suerte igual* requiere de un análisis más fino. La obra de Huygens aclara los términos. He aquí las tres primeras proposiciones del *Tractatus*:

Proposición I:
Tener probabilidades iguales de obtener a o b equivale a

$$\frac{a + b}{2}$$

Proposición II:
Que a, b, c tengan igual probabilidad equivale a

$$\frac{a + b + c}{3}$$

Proposición III:
Tener la probabilidad p de obtener a y la probabilidad q de obtener b, siendo estas probabilidades equivalentes, corresponde a

$$\frac{ap + bq}{p + q}$$

Por ejemplo, si se tienen 3 probabilidades de ganar 13 y 2 probabilidades de ganar 8, la fórmula anterior da el número de *suertes*:

$$\frac{3 \cdot 13 + 2 \cdot 8}{2 + 3} = 11$$

La Proposición I es un caso especial de la Proposición III ($p = q = 1$). Atisbos de la carta ausente de Van der Meer afloran a través de la respuesta, cuya última frase —"como sucede en su problema"— retoma el hilo inicial, ¿cuál es tal problema? Arriesgaré una formulación probable —y más general—: considérese un juego en el cual participan A y B. A guarda en la mano uno de entre p números posibles. B debe adivinarlo en k intentos o jugadas ($k \leq p$). Determinar las condiciones para que el juego sea justo. La solución de Spinoza atiende a la apuesta de cada jugador, cuyo monto —teniendo in mente la justicia— ha de ser para A,

$$\left(1 - \frac{k}{p}\right) \text{ y para B, } \left(\frac{k}{p}\right)$$

De tal modo si $p = 6$ y B adivina 5 veces, las sumas en juego deben ser

$$\left(1 - \frac{5}{6}\right) \text{ y } \frac{5}{6}$$

(verbigracia, A arriesga $\frac{1}{6}$ para ganar $\frac{5}{6}$. La apuesta de A se mantiene, si en lugar de los cinco intentos de B, cinco jugadores distintos adivinan cada cual una vez).

En los juegos de azar, los resultados son inciertos. Sin embargo, la probabilidad de ganar o de perder posee un valor determinado. La fascinación de jugar reside en esa vacilación entre lo cierto y lo incierto. La teoría intenta fijar los límites de ambas instancias. Por ello el deleite —voluptates— (vocablo usado por Huygens) nace no sólo del juego, sino de la comprensión del mecanismo del cálculo. En el caso de Spinoza no es posible disociar el análisis de la justicia y la voluptuosidad misma de pensar acerca de la suerte.

NOTAS

Nota 1: En 1655, Huygens está en París. Por Claude Mylon tiene noticia de los problemas discutidos por Pascal y Fermat, quienes intercambian soluciones sin hacer públicos sus métodos. La idea de la composición del *Tractatus* parece haber surgido entonces.
Véase, Alfonsina D'Elia, *Christiaan Huygens —una biografia intellettuale*, F. Angeli, Milano, 1985, p. 145-150).

Nota 2: Una larga sección de cierta carta a Johannes Hudde (p. 253 líneas 18-35; p. 254; p. 255 líneas 1-12) muestra in vivo el oficio técnico-matemático de Spinoza, pulidor de lentes. Hay una serie de errores tipográficos: (i) en la edición de A. Domínguez: p. 254; línea 4:

debe leerse $z = \sqrt{\frac{9}{4} z^2 - x^2} - \sqrt{1 - x^2}$ en lugar de

$$z = \sqrt{\frac{9}{4} z^2 - x^2 - 1 - x^2}$$

línea 15:

debe leerse $NR = \sqrt{z^2 - x^2} - \sqrt{1 - x^2}$ en lugar de

$$NR = \sqrt{z^3 - x^2} - \sqrt{1 - x^2}$$

(ii) En las notas de la edición de Ch. Appuhn:
p. 369, línea 23:

debe leerse sen i = n sen r en lugar de
sen i = n sen z

p. 370, línea 9:

debe leerse $\frac{16 + \sqrt{756}}{25}$ en lugar de $\frac{16 \times \sqrt{756}}{25}$

Nota 3: En matemáticas. Jan de Witt, el Gran Pensionario de Holanda, no sólo trató este problema de seguros. Dedicó buena parte de sus estudios a la geometría. (Véase, J.L. Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs*, Oxford, Clarendon Press, 1949, pp. 119-131).

Nota 4: Conviene aclarar el concepto de *juego justo*, ocasión —por decirlo de algún modo— de justicia y de justeza. Y para ello, contrastarlo a una ocurrencia lúdica que no lo sea. Espigando un antiguo —y no anticuado libro (H. Laurent, *Traité du calcul des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1873, pp. 40-43)— puede hallarse la descripción de la lotería real —la cual dejó de jugarse, en Francia, en 1839. Tal juego viene al caso, a modo de contraparte.

He aquí sus características: de 90 números se elegía una combinación de 1, 2, 3, 4 ó 5 antes del sorteo. Decíase que se jugaba respectivamente al extracto, al ambo, a la terna, a la cuaterna y a la quina (o al quinterno). La apuesta máxima era de doce francos. El jugador que ganaba el extracto recibía 15 veces el valor de la apuesta, el ambo 270 veces, la terna 5.500 veces y la cuaterna 7.500 veces (de hecho, no se jugaba al quinterno). ¿Tratábase de un juego *justo*? Esta pregunta debe formularse en términos acordes al pensamiento de Spinoza. En primer lugar: ¿Cuáles son —eran— las probabilidades de ganar en cada uno de estos casos?

$$\text{La probabilidad } P = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{C_{5-a}^{90-a}}{C_5^{90}}$$

(a = 1, 2, ...5)

$$\text{Si } a = 1 \quad P = \frac{C_4^{89}}{C_5^{90}} = \frac{1}{18} \qquad \text{extracto}$$

$$a = 2 \quad P = \frac{C_3^{88}}{C_5^{90}} = \frac{2}{801} \qquad \text{ambo}$$

$$a = 3 \quad P = \frac{C_2^{87}}{C_5^{90}} = \frac{1}{11.748} \qquad \text{terna}$$

$$a = 4 \quad P = \frac{C_1^{86}}{C_5^{90}} = \frac{1}{511.038} \qquad \text{cuaterna}$$

$$a = 5 \quad P = \frac{C_0^{85}}{C_5^{90}} = \frac{1}{43.949.268} \qquad \text{quinterna, quina}$$

Entonces, por ejemplo, en el caso del extracto el jugador debe recibir 18 veces lo apostado. Estas probabilidades no corresponden a las ganancias posibles y esperadas.

No existe proporción entre la apuesta y la probabilidad de ganar. La lotería real no es —no era— un *juego justo.*

III
El Infinito
(Carta a Lodowijk Meyer, 20 de abril de 1663)

"Usted me pide le comunique mis ideas sobre el infinito y lo hago con muchísimo *gusto*". He subrayado la palabra gusto. No se trata, creo, en este caso de una fórmula de cortesía. Apunta, sin aspavientos, a la posibilidad misma de pensar. Sin deleite acaso no exista pensamiento. Al menos ese trato delicado, previo al aprecio y apreciación, de tal o cual tema. Una frase, situada por lo demás entre paréntesis, de G. Scholem, trae un eco semejante: ("esta alegría de la infinitud era un elemento que ya me había impresionado de modo peculiar en mis años de estudios matemáticos") (G. Scholem, *Walter Benjamin —Historia de una amistad—*, traducción y presentación de J. F. Yvars y V. Jarque; Ed. Península, Barcelona, 1987, p. 213). El infinito en Spinoza: se trata de ir más allá de este título de tesis, a todas luces. Ya Leibniz, llevado por su curiosidad viva e insaciable, había transcrito esta carta. El matemático Jean Dhombres la sitúa entre los trabajos precursores de la obra de G. Cantor (*Nombre, mesure et continu —epistomologie et histoire—* Cedic-Nathan, Paris, 1978, pp. 250-254). Dhombres sólo la *describe,* por así decirlo, no entra en ella; más bien la ubica en el mapa cuya construcción es el propósito primordial de su libro. Aparecen en ella argumentos de diversa índole, ontológicos y matemáticos, al unísono. El problema se convierte en deslindar a las claras el problema. El sesgo considerado posee rasgos definidos en la

composición misma de la *obra* (acaso el vocablo suene excesivo por lo breve y peculiar del texto. Creo no viene al caso tomar en cuenta tales características *externas* al calificar su alcance). Pueden, así, distinguirse:
1) La cuestión del infinito (p. 130, líneas 6-17).
2) El sistema de Spinoza (p. 130, líneas 26-39 y p. 131, líneas 1-12).
3) Medida, tiempo, número (p. 132, líneas 12-25).
4) Un ejemplo matemático (p. 133, líneas 28-31 y p. 134, líneas 1-27).
5) Ciertas conclusiones (p. 135, líneas 10-27).
Esta secuencia —hilada casi a modo de ejercicio escolar— señala apenas un rumbo. El trabajo propuesto y expuesto en estas páginas consiste en mostrar la trama y la urdimbre de un tejido invisible: un pensamiento pensado. A tal efecto conviene otorgar a cada uno de los cinco temas señalados un sentido musical y algebraico, de suerte que sus acordes y combinaciones constituyan materia de estudio.

Spinoza, de por vida, quiso formular su pensamiento siguiendo el paradigma del orden geométrico. Aquel intento suyo conserva la forma: proposición, prueba, escolio...; el rigor aducido al cual pareciera adosarse el despliegue del argumento sólo vive, hoy, en y de tal aspecto. Quisiera, por mi parte, rescatar ese cuidado formal, interpelando —esta vez— a un sentido distinto de aquel modo —extremado— de pensar. Al juego de relaciones —entre los temas— lo llamaré *Algoritmo de Spinoza.* No debe aquí entenderse por algoritmo mero procedimiento de cálculo; más bien: perspectiva desde la cual es posible un método semejante. Estudiaré algunas de estas combinaciones.

Temas (1), (2), (5)

¿Cuál es la relación entre el problema del infinito y el sistema?

Spinoza concluye: "he puesto en breves palabras ante sus ojos las causas de los errores y confusiones en torno a la cuestión del infinito, y si no me engaño, las he explicado todas". Esta conclusión debe entenderse: en el contexto del sistema tales cuestiones pueden plantearse y en consecuencia, de cierta manera, tienen respuesta. En (2), Spinoza apunta a cuatro vocablos, vena profunda de su pensamiento: substancia, modo, eternidad, duración. No se trata, aquí, de comentarlos. Por el contrario, mostrar a su través un hecho a menudo dejado de lado al considerar la expresión, la exposición filosófica: el pensamiento es trama verbal. Y estas cuatro palabras, cruciales, pertenecen y permanecen en cierto estado que podría designarse: categoría de la definición. Spinoza, de hecho, no hace otra cosa: define tales palabras y mediante esta definición señala su pertenencia a un sistema. Podría decirse, de modo matemático: Spinoza aclara su notación (valga aquí este inciso: acaso todo sistema sea un conjunto de signos vinculados entre sí, es decir: una notación). Una dificultad emprende su vuelo —digamos—: los conceptos, adheridos a su trasfondo verbal, idiomático (si cada "filosofía" lleva consigo un idioma), no poseen esa capacidad de maniobra, esa precisión y soltura propicias y apropiadas en esta ocasión: tratar de modelar un tópico matemático. Sin embargo, pregunto: ¿puede un pensador omitir aquello cuya elaboración constituye lo más propio de sí: un sistema?

Entonces lo que surge *como problema* —para Spinoza— es tal en virtud de su posible situación, acogida, inscripción, dentro de aquel marco mental. Spinoza *sólo* ve y apunta hacia el dominio conceptual abierto e iluminado por su sistema (en (4) pueden vislumbrarse márgenes intactas por los cuales esa lámpara —sistema— no pasa).

Así al abordar el tema del infinito, establece ciertas distinciones (nunca está de más reiterar lo sabido: pensar equivale, casi siempre, a precisar distingos, matices) entre infinito por naturaleza e infinito por su causa, entre infinito sin límites e infinito cuyas partes no pueden designarse mediante número, entre lo propio del entendimiento y lo propio de la imaginación.

A cada una de estas distinciones corresponde —en el sistema una propiedad simétrica, por decirlo de alguna manera: (i) a la esencia de la substancia pertenece la existencia, una eterna e infinita. Substancia y eternidad sólo pueden concebirse como infinitas. La cantidad concebida mediante el entendimiento es única, indivisible, infinita. Por tanto en el problema del infinito cabe precisar el infinito por naturaleza, el cual se puede entender pero no imaginar. (ii) La definición de los modos o afecciones de la substancia no implica existencia. La existencia de los modos se da en la duración. La cantidad, en la imaginación, es finita, múltiple —consta de partes—, y divisible. En el problema del infinito aparece en consecuencia el infinito por su causa y no por su esencia, y el infinito inscrito entre un máximo y un mínimo (ver (4)).

En lo que he llamado tema de las conclusiones (5), Spinoza vuelve a estas divisiones conceptuales, y cree haberlas asentado de modo luminoso: "Por todo lo anteriormente dicho, se ve con claridad que algunas cosas son infinitas por su propia naturaleza y *no pueden concebirse de ningún modo como finitas; que ciertas cosas* lo son en virtud de la causa a la que inhieren...". He transcrito este fragmento para señalar que la frase subrayada *falta* en la edición de A. Domínguez. Para completarla he recurrido a la edición de Ch. Appuhn.

TEMAS (3), (4)

Medida, tiempo y número son auxiliares de la imaginación; no son, ni pueden ser, por ende, infinitos. El tiempo mide la duración, la medida determina la cantidad. Así, duración y cantidad caben y caen en la imaginación gracias a tiempo y medida, ¿y el número? No está de más indicar la belleza del argumento mediante el cual Spinoza expone lo que llamaré: el nacimiento del número. No deben confundirse los modos de la substancia y la substancia misma. Para poder imaginar a los modos se le reduce a clases; entonces de esta doble operación:

a) Separación substancia - modos de la substancia
b) Clasificación de los modos
 Surge el número

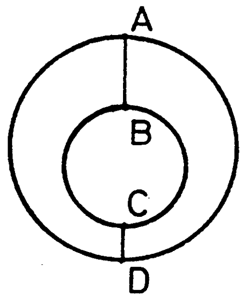
Nótese: el número no toca siquiera a la substancia, permite sólo imaginar sus modos. Por esta razón, cuando Spinoza dice: "Los matemáticos han descubierto muchas cosas que no se pueden explicar con número alguno, lo cual pone en evidencia la incapacidad de los números para determinarlo todo", y emplea implícitamente la noción de número cuyo origen acaba de exponerse, esa *incapacidad* referida a la substancia constituye una petición de principio.

Tal noción debe despojarse de su vestidura verbal para afianzarse de modo matemático, es decir, para constituir una *posibilidad de operación*. Este paso apenas se insinúa en Spinoza.

La frase citada continúa refiriéndose a los matemáticos: "También conocen otras que no se pueden equiparar a ningún número, sino que superan cualquier número que se pueda asignar". Bajo las palabras tiembla el dilema del número finito y del número que siglos después Cantor llamará transfinito. Spinoza ilustra la dificultad mediante el ejemplo de dos círculos excéntricos: "Las desigualdades del espacio interpuesto entre dos círculos AB y CD, y todas las variaciones que debe sufrir la materia que se mueve en él, superan todo número".

AB y CD son, respectivamente, la distancia máxima y la distancia mínima entre ambos círculos.

Spinoza alude al número correspondiente al intervalo entre AB y CD. De hecho, tal número equivale al de un segmento de recta d = AB-CD. Asignar un número a un segmento es *contar* los números reales: d tiene la potencia del continuo (dixit Cantor). No corresponde, de modo anacrónico, sacar a relucir este capítulo matemático ignorado por Spinoza. Por el contrario, si lo



he mencionado es para precisar el temple de su especulación: bordea, siempre, lo más íntimo de la dificultad.

"Las desigualdades de esa pequeña porción superarán todo número. Tampoco se infiere dicha conclusión de que no contemos con un máximo y un mínimo". AB y CD, máximo y mínimo, existen —por construcción. No es posible, sin embargo, asignar un número *finito* a las desigualdades del espacio comprendido entre ambos. El aserto de Spinoza no es justo *por omisión*: falta el adjetivo subrayado, núcleo del asunto y de la controversia. El final del párrafo es inexacto: "De ahí, si alguien quiere determinar todas aquellas desigualdades mediante un número definido, deberá lograr, al mismo tiempo, que el círculo no sea círculo". El error matemático, aquí, consiste en confundir la esencia del círculo y un número transfinito. Idéntico número —la potencia del continuo— corresponde por ejemplo a la recta o al espacio comprendido entre dos figuras cualesquiera (una de las cuales contiene a la otra, si tal se desea). La esencia de la figura elegida es del todo irrelevante.

IV

Una reciente y cuidada edición del *Tratado Político* (H. Giannini y M.I. Flisfisch, Ed. Universitaria, Santiago, 1990) exhibe en su cubierta el retrato de El Geógrafo, obra de Jan Vermeer. Tal frontispicio —aquel personaje cuya mirada vislumbra algo desconocido a través del vidrio— pulsa la nota justa. Spinoza —al margen de su fe, pulidor de lentes, viviendo de paso— concilia el compás y la inquietud, su obra y su vida: asir el sitio —valga la expresión— de la dulce, frágil e infinita libertad humana.